Exercice 1

(la géométrie dans l'espace)

On considère les points A (0, 3,1), B (-1, 3,0) et C (0, 5,0).

1. a) Montrons que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ *On a ;* $\overrightarrow{AB}(-1,0,-1)$ *et* $\overrightarrow{AC}(0,2,-1)$

Donc :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(0+2)\vec{i}-(1+0)\vec{j}+(-2-0)\vec{k}$$

D'où : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

b) $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,-1,-2)$ *est un vecteur normale au plan, en déduit que* $2x-y-2z+d=0$ *est une équation cartésienne du plan (ABC) et A appartient au plan,*

On a A (0, 3,1) donc

$$2\times 0-3-2\times 1+d=0\Rightarrow\ d=5$$

ce qui donne l'équation du plan (ABC) : $2x-y-2z+5=0$.

2. a) Montrons que $\Omega(1,-1,0)$ *est le centre de(S) et que son rayon est r=3*

L'équation de (S) est $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$

donc $(x-2)^2+(y-0)^2+(z-0)^2-5-4=0$

$$(x-2)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=3^2$$

Ce qui montre que (S) a pour centre $\Omega(2,0,0)$ *et rayon r =3.*

b) calculons $d(\Omega,(ABC))$

on a : $$d(\Omega,(ABC))=\frac{|2\times(2)-(0)-2\times(0)+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{|9|}{\sqrt{9}}=3$$

on en déduit que le plan (ABC) est tangent a la sphère (S) car $d(\Omega,(ABC))=3=r$

c) Soit $H(x_{H,}y_{H,}z_H)$ *le point de contact du plan* (ABC) *et la sphere* (S)

$\overrightarrow{\Omega H}$ *est orthogonal au plan* (ABC) *et* H *appartient au plan*

Donc il existe $t\in IR$ tel que $\overrightarrow{\Omega H}=t\vec{n}$ $(1)\ \begin{cases}x_H-x_\Omega=2t\\ y_H-y_\Omega=-t\\ z_H-z_\Omega=-2t\end{cases}$

et $2x_H-y_H-2z_H+5=0$ (2) *En remplaçant* x_H, y_H *et* z_H

de (1) *dans* (2) *on obtient :* $2(2t+2)-(-t)-2\times(-2t)+5=0$

$$9t+9=0$$

$$t=-1$$

$$D'où : \begin{cases} x_H = 2\times(-1)+2=0 \\ y_H = -(-1)=1 \\ z_H = -2\times(-1) = 2 \end{cases}$$

Alors $H\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

Exercice 2

(les nombres complexes)

1. a) Soit l'équation : $z^2 - z\sqrt{2}+2=0$

Le discriminant $\Delta = b^2-4ac = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 4\times1\times2$

$=2-8 = -6$

On a $\Delta<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-\left(-\sqrt{2}\right)+i\sqrt{|-6|}}{2} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$$

$$z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-\left(-\sqrt{2}\right)-i\sqrt{|-6|}}{2} = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{2}$$

D'où $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$

2. Soit $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$

a) déterminant le module et l'argument de u.

- $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ donc $|u| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}$

  d'où $|u|=\sqrt{2}$

- $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ et $|u|=\sqrt{2}$ donc $u=\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$

  d'où $u=\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

et comme : $\begin{cases}\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}\end{cases}$ alors u s'écrit : $u=\sqrt{2}\times\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

conclusion : $|u|=\sqrt{2}$ et $\arg(u)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) $u=\sqrt{2}\times\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ d'après la formule de Moivre on a:

$$u^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6\times\left(\cos 6\times\frac{\pi}{3}+i\sin 6\times\frac{\pi}{3}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^6\times\left(\underbrace{\cos 2\pi}_{=1}+i\underbrace{\sin 2\pi}_{=0}\right)$$

$u^6=8$ donc u est réel .

R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

on a : $(z'-z_o)=(z'-z_o)e^{i\frac{\pi}{3}}=z\times\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow\ z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

b) on a : $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(4-4i\sqrt{3}\right)$

$$=2-\frac{1}{2}\times4i\sqrt{3}+4\times i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{3}$$

$$=2-2i\sqrt{3}+2i\sqrt{3}+2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=8$$

donc $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a=b$

ce qui signifie que B est l'image de A par la rotation R

on a $B=R(A)$ donc $OA=OB$ et $\overline{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Et par suite le triangle OAB est isocèle.

Exercice 3

(les suites)

$$\begin{cases} u_0=13 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+7 \quad (\forall n\in IN)\end{cases}$$

1. a)montrons par récurrence que : $((\forall n\in IN)\ u_n<14)$ (P)
   - pour n=0 on a $u_0=13<14$ donc (P) est vraie.
   - Soit $n\in IN$: supposons que (P) est vraie pour n et montrons qu'elle l'est pour (n+1)

     (P) est vraie, on a : $u_n<14$

$$\boxed{\begin{aligned} u_n<14 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n<\frac{1}{2}\times14 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n+7<7+7 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1}<14 \end{aligned}}$$

Donc (P) est vraie pour (n+1).

<u>Conclusion :</u> $((\forall n\in IN)\ u_n<14)$

2. $v_n=14-u_n\quad(\forall n\in IN)$

a)

$$14-u_{n+1}=14-\left(\frac{1}{2}u_n+7\right)$$
$$=14-\frac{1}{2}u_n-7$$
$$=\frac{1}{2}(14-u_n)$$
$$=\frac{1}{2}v_n$$

D'où $\left((\forall n\in IN)\ \ v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n\right)$

On conclue que: la suite (u_n) *est géométrique de raison* $q=\frac{1}{2}$ *et de premier terme* $v_0=1$

Et on a : $\left((\forall n\in IN)\ \ v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

b) *on a* : $v_n=14-u_n\quad(\forall n\in IN)$

$$\Leftrightarrow u_n=14-v_n\quad(\forall n\in IN)\quad Donc:(\forall n\in IN)\quad u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Et comme

$$\left|\frac{1}{2}\right|<1\quad alors\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$

$$Donc:\quad \lim_{n\to+\infty}u_n=14$$

c) *déterminons la plus petite valeur de n pour laquelle* $u_n>13,99$

On a :

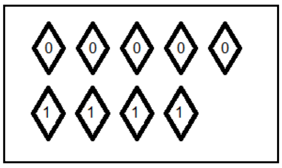
$$u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n>13,99\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^n<0.01$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^n<10^{-2}\Leftrightarrow ln\left(\frac{1}{2}\right)^n<ln\left(10^{-2}\right)$$
$$\Leftrightarrow n\ ln\left(\frac{1}{2}\right)<-2ln10\Leftrightarrow n(-ln2)<-2ln10$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{-2ln10}{-ln2}\Leftrightarrow n>\frac{-2ln10}{-ln2}\Leftrightarrow n>\frac{2ln10}{ln2}$$

Donc $n>6,6$

d'où la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n>13,99$ *est* 7.

Exercice 4

(la probabilité)



- *On tire de façon aléatoire et simultanément de l'urne 2 jetons*

$$Card\Omega=C_9^2=36$$

1 .A «*la somme des deux numéros que portent les 2 jetons tirés est 1* »

$$CardA=C_5^1\times C_4^1=20$$

$$p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

2. a) B « *les 2 jetons tirés portent chacun le numéro 1* »

$$CardB=C_4^2=6$$

$$p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

donc la probabilité que SAID gagne est $\frac{1}{6}$

b) *reprendre le jeu 3 fois en remettant à chaque fois les jetons , alors la probabilité que SAID gagne exactement deux fois est :*

- $p(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^1 1=\frac{5}{72}$

Si on reprend une expérience n fois la probabilité qu'un événement A se réalise exactement k fois est donner par la formule : $p(X_A=k)=C_n^k\,(p(A))^k\,(1-p(A))^{n-k}$

Probléme

(Etude de fonction)

I. $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[)\quad g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$

1. $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[)\quad g'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}+\ln x\right)'=\left(-\frac{1}{x^2}\right)'+(\ln x)'$

$$=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}$$

donc : $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[)\quad g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}$

On en déduit que $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[)\quad g'(x)>0\quad\left(\text{car }\frac{2}{x^3}>0\text{ et }\frac{1}{x}>0\right)$

et par suite que g est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$.

2. *on a* $g(1)=0$ *et comme g est croissante sur* $\left]0,+\infty\right[$ *alors* :

$$\begin{cases}(\forall x\in\left]0,1\right])\ x\le 1\Rightarrow g(x)\le g(1)=0\\(\forall x\in\left[1,+\infty\right[)\ x\ge 1\Rightarrow g(x)\ge g(1)=0\end{cases}$$

D'où le tableau de signe de g suivant :

x	0		1		$+\infty$
g(x)		-	0	+	

II. $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[)\quad f(x)=(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}$

1. $on\ a\ :\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

car $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(1+\ln x)^2=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^2}=+\infty\end{cases}$

donc (C) *admet la droite* $x=0$ *comme asymptote verticale*

au voisinage de $+\infty$

$a)\ on\ a:\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty\ car\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\ln x)^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0\end{cases}$

$b)$ *on pose* $t=\sqrt{x}$ *donc* $x=t^2$ *et* $x\to+\infty$ *alors* $t\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln t^2)^2}{t^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+\frac{2\ln t}{t}\right)^2\quad\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln t}{t}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{t}=0\end{cases}$$

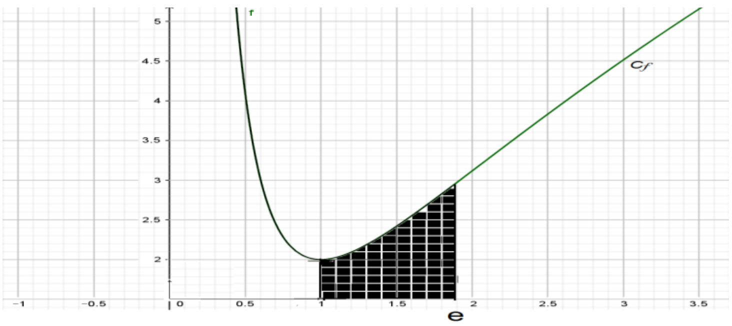
$donc:\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=0$

On en déduit que $:\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$

$c)\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ *,donc* (C_f)

une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ *de direction l'axe des abscisses.*

4. $a)$ *la représentation graphique de* (C_f)



3. $a)$ $on\ a$: $(\forall x \in]0,+\infty[)$ $f'(x) = \left((1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}\right)'$

$$= 2\times\frac{1}{x}\times(1+\ln x) - 2\times\frac{1}{x^3}$$

$$= \frac{2}{x}\times\left((1+\ln x) - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2g(x)}{x}$$

- $donc : (\forall x \in]0,+\infty[)$ $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$
- $\begin{cases} (\forall x \in]0,1]) \ \mathrm{x} \le 1 \Rightarrow \mathrm{g(x)} \le 0 \\ (\forall x \in [1,+\infty[) \ \mathrm{x} \ge 1 \Rightarrow \mathrm{g(x)} \ge 0 \end{cases}$

  f *est décroissante sur* $]0,1]$

  f *est décroissante sur* $[1,+\infty[$

Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

- *2 est un minimum absolue de f sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *donc on a :*

  $(\forall x \in]0,+\infty[)$ $f(x) \ge 2$

5. $a)$ $(\mathrm{H}: x \to x\, ln x)$ est *dérivable sur l'intervalle* $]0,+\infty[$

et $\mathrm{H}'(x) = (x\, lnx)' = lnx + x\times\frac{1}{x}$

$$= lnx + 1 = h(x)$$

donc H *est une primitive de h sur* $]0,+\infty[$

On a $:\mathrm{I} = \int_1^e (1+lnx)\,dx = [\mathrm{H}(x)]_1^e = [x\, lnx]_1^e$

donc : $\mathrm{I} = e$

$b)$ *on pose* $\begin{cases} u(x) = (1+\ln x)^2 \Rightarrow u'(x) = \dfrac{2(1+lnx)}{x} \\ v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x \end{cases}$

donc en integrant par partie on a :

$$\mathrm{J} = \int_1^e (1+lnx)^2\,dx = \left[x(1+lnx)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{2(1+lnx)}{x}\times x\,dx$$

$$= 4e - 1 - 2\int_1^e (1+lnx)\,dx$$

$$= 4e - 1 - 2I = 4e - 1 - 2e$$

Donc $\mathrm{J} = 2e - 1$

$c)$ Soit A *l'aire a calculer on a* $A=\int_1^e |f(x)|\,dx$ *et puisque* $f(x)\geq 0$ *sur* $[1,e]$

$$A=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}\right)dx\ u.a=\left(\int_1^e(1+\ln x)^2\,dx+\int_1^e\frac{1}{x^2}\,dx\right)u.a$$

$$A=\left(J+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e\right)u.a=\left(2e-1-\frac{1}{e}+1\right)u.a=\left(2e-\frac{1}{e}\right)u.a\quad\left(u.a=1cm^2\right)$$

$$donc: A=\frac{2e^2-1}{e}cm^2$$