



guessmaths

Exercice 1: (3,5 points)

I- Dans l'anneau unitaire $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$; on considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

0,75 1) Calculer $I - A$ et A^2

0,5 2) Dédire que A est inversible puis déterminer son inverse.

II- pour tous réels a et b de l'intervalle $I =]1, +\infty[$; on pose :

$$a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$$

0,25 1) Vérifier que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$

0,5 2) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I .

3) On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application : $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{R}_+^* \rightarrow I \\ x \mapsto \sqrt{x+1} \end{matrix}$

0,5 a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers $(I, *)$

0,25 b) Dédire la nature de $(I, *)$

0,75 c) Montrer que l'ensemble $\Gamma = \{\sqrt{1+2^m} / m \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(I, *)$.

Exercice 2: (3,5 points)

I- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$; où a est un nombre complexe non nul.

0,75 1) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de (E) .

0,25 2) a) Vérifier que $z_1 z_2 = (1-i)a^2$

0,5 b) Montrer que : $z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Arg}(a) \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$

II- Soit c un réel non nul et z un nombre complexe non nul.

On considère les points $A ; B ; C ; D$ et M d'affixes respectifs $1 ; 1+i ; c ; ic$ et z .

0,5 1) a) Montrer que : $A ; D$ et M sont alignés $\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$

0,5 b) Montrer que : $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0$

2) Soit h l'affixe du point H le projeté orthogonale du point O sur la droite (AD) .

0,75 a) Montrer que : $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$

0,25 b) Dédurre que : $(CH) \perp (BH)$

Exercice 3 : (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 143x - 195y = 52$

0,5 1) a) Déterminer le $\text{pgcd}(195 ; 143)$; puis déduire que (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

0,75 b) Sachant que le couple $(-1, -1)$ est une solution particulière de (E) ; résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisons les étapes de la résolution.

0,5 2) Soit n un entier naturel non nul tel que $n \wedge 5 = 1$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $n^{4k} \equiv 1[5]$

3) Soient x et y deux entiers naturels non nuls tels que : $x \equiv y[4]$

0,5 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n^x \equiv n^y[5]$

0,5 b) Dédurre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n^x \equiv n^y[10]$

0,25 4) Soient x et y deux entiers naturels tel que le couple (x, y) est une solution de (E)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les nombre n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans la base 10.

Exercice 4 : (5,5 points)

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

Et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

0,5 2) a) Etudier la branche infinie de (C_n) au voisinage de $-\infty$.

0,5 b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique pour (C_n) au voisinage de $+\infty$; puis déterminer la position relative de (C_n) et de (D) .

0,75 3) Etudier les variations de f_n ; puis dresser son tableau de variations.

0,75 4) Construire la courbe (C_3) (On prend $f_3(-1,5) = 0$; $f_3(-0,6) \approx 0$ et $\ln 3 \approx 1,1$)

0,25 5) a) Montrer que pour tout $n \geq 3$; on a : $\frac{e}{n} < \ln n$.

1 b) Montrer que pour tout $n \geq 3$; l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que : $x_n \leq -\ln n$ et $\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$

0,5 c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$

6) Soit g la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x & ; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

0,25 a) Montrer que g est continue à droite en 0.

0,25 b) Vérifier que pour tout $n \geq 3$; $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$.

0,25 c) Dédurre $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$.

Exercice 5 : (4,5 points)

On considère la fonction F définie sur $[0,1]$ par : $\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} & ; x \in]0;1] \\ F(0) = 1 \end{cases}$

0,25 1) Soit $x \in [0,1]$

Montrer que pour tout $t \in [0;x]$ on a : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

2) Soit $x \in]0,1]$

0,5 a) Montrer que : $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$

0,75 b) Montrer que : $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$; puis déduire que la fonction F est continue à droite en 0.

0,75 3) En utilisant une intégration par parties ; montrer que pour tout $x \in [0,1]$:

$$\int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

4) Soit $x \in]0,1]$

0,5 a) Montrer que : $F'(x) = -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$

0,75 b) Montrer que : $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

(On pourra utiliser le résultat de la question 1))

0,75 c) En utilisant le Théorème Des Accroissements finis à la fonction F sur

l'intervalle $[0;x]$ Montrer que : $\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

0,25 d) Déduire que F est dérivable à droite en 0 et déterminer son nombre dérivé à droite en 0.