

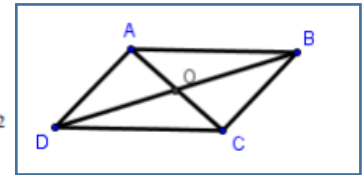
EXERCICE 1

Soit ABCD un parallélogramme de centre O tels que $AC = 6$, $BD = 4$ et $AD = \sqrt{7}$

1. a) Montrer que $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$ (utiliser la relation de Chasles)
b) Calculer AB
2. a) Calculer $\cos(\angle AOB)$
b) Déduire la mesure de $\angle AOB$

CORRECTION EXERCICE 1

$$\begin{aligned}
 1. \ a) \quad \text{On a } AC^2 + BD^2 &= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 \\
 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2 \\
 &= \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 \\
 &= AB^2 + 0 + AD^2 + AD^2 - 0 + AB^2 \\
 &= 2(AB^2 + AD^2)
 \end{aligned}$$



$$b) \quad \text{On a } AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$$

$$\text{donc } AB^2 = \frac{AC^2 + BD^2}{2} - AD^2 = \frac{6^2 + 4^2}{2} - (\sqrt{7})^2 = 19 \text{ d'où } AB = \sqrt{19}$$

2. a) D'après le théorème d'ALKASHI

$$\text{on a } \cos(\angle AOB) = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \times OA \times OB} = \frac{3^2 + 2^2 - (\sqrt{19})^2}{2 \times 3 \times 2} = \frac{9 + 4 - 19}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$b) \quad \text{On a } \cos(\angle AOB) = -\frac{1}{2} \text{ donc } \angle AOB = \frac{2\pi}{3}$$

EXERCICE 2

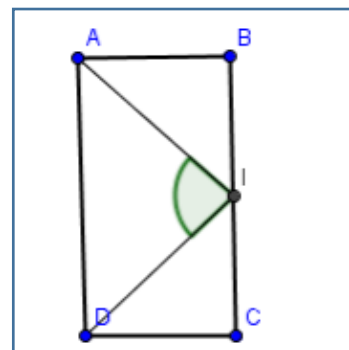
Soit ABCD un rectangle tels que I milieu de $[BC]$, $AB = 4$ et $BC = 8$

1. Calculer $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{IB})$
2. Déduire la valeur de $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID}$
3. Calculer $\cos(\angle AID)$ puis déduire la mesure de $\angle AID$

CORRECTION EXERCICE 2

$$\begin{aligned}
 1. \quad \text{On a } (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{IB}) &= \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{IB}^2 \\
 &= BA^2 - IB^2 \\
 &= 4^2 - 4^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \text{On a } \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID} &= (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD}) \quad (\text{car } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}) \\
 &= (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}) \cdot (-\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}) \quad \text{et } \overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$



3. D'après l'expression trigonométrique du produit scalaire

$$\text{On a } \cos(AID) = \frac{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID}}{IA \times ID} = \frac{0}{IA \times ID} = 0$$

$$\text{puisque } \cos(AID) = 0 \text{ donc } AID = \frac{\pi}{2}$$