Série n ° 4 d'exercices « arithmétique » 1éreBAC SM

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on pose : $a = 5n^2 + 7$ et $b = n^2 + 2$

1) Montrer que : $(\forall d \in \mathbb{Z})$; $(d \backslash a \text{ et } d \backslash b) \Rightarrow d \backslash 3$

2) on suppose que : $a \wedge b = 3$; montrer que : $(\exists k \in \mathbb{N}) / n^2 - 1 = 3k$.

3) Déterminer $H = \{n \in \mathbb{N}^* / \ a \wedge b = 3\}$.

Exercice 2

Soit p un entier naturel premier tel que : $p \geq 3$

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}^*$ tels que : $a^2 \equiv 1[p^r]$

1) Montrer que : $p \backslash a+1$ ou $p \backslash a-1$

2) Montrer que : $p \backslash a-1 \Rightarrow p \wedge (a+1) = 1$

3) Déduire $a \equiv 1[p^r]$ ou $a \equiv -1[p^r]$

4) Montrer que : $a^2 \equiv 1[p^r] \Leftrightarrow (a \equiv 1[p^r] \text{ ou } a \equiv -1[p^r])$

5) Résoudre dans $\mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$: $x^2 + \overline{2}x = \overline{0}$.

Exercice 3

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ les deux équations : a) $\overline{4}x = \overline{3}$ b) $x^2 - x - \overline{2} = \overline{0}$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ les systèmes suivants : $(S_1): \begin{cases} \overline{3}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases}$ et $(S_2): \begin{cases} \overline{7}x - \overline{6}y = \overline{3} \\ \overline{3}x + \overline{8}y = \overline{15} \end{cases}$