

Exercice n°1.

1) Exprimer en fonction de $\ln 2$ les nombres suivants :

$$A = \ln 8 \quad ; \quad B = \ln \frac{1}{16} \quad ; \quad C = \frac{1}{2} \ln 16 \quad ; \quad D = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4}$$

2) Exprimez en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les réels suivants :

$$a = \ln 24 \quad ; \quad b = \ln 144 \quad ; \quad c = \ln \frac{8}{9}$$

3) Ecrire les nombres A et B à l'aide d'un seul logarithme :

$$A = 2\ln 3 + \ln 2 + \ln \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1}{2} \ln 9 - 2\ln 3$$

Correction Exercice n°1.

1) • $A = \ln 8 = \ln(2^3) = \boxed{3\ln 2}$

• $B = \ln \frac{1}{16} = -\ln 16 = -\ln 2^4 = \boxed{-4\ln 2}$

• $C = \frac{1}{2} \ln 16 = \frac{1}{2} \ln 2^4 = \frac{1}{2} \times 4\ln 2 = \boxed{2\ln 2}$

• $D = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{2} \ln 4 = -\frac{1}{2} \ln 2^2 = -\frac{1}{2} \times 2\ln 2 = \boxed{-\ln 2}$

2) $a = \ln 24 = \ln(3 \times 8) = \ln 3 + \ln 2^3 = \boxed{\ln 3 + 3\ln 2}$

$$b = \ln 144 = \ln(12)^2 = 2\ln(3 \times 4) = 2\ln(3 \times 2^2) \\ = 2\ln 3 + 2\ln 2^2 = \boxed{2\ln 3 + 4\ln 2}$$

$$c = \ln \left(\frac{8}{9} \right) = \ln \left(\frac{2^3}{3^2} \right) = \ln 2^3 - \ln 3^2 = \boxed{3\ln 2 - 2\ln 3}$$

$$A = 2\ln 3 + \ln 2 + \ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln 3^2 + \ln 2 - \ln 2 = \boxed{\ln 9}$$

$$B = \frac{1}{2} \ln 9 - 2\ln 3 = \ln(\sqrt{9}) - 2\ln 3$$

$$= \ln 3 - 2\ln 3 = -\ln 3 = \boxed{\ln \left(\frac{1}{3} \right)}$$

Exercice n°2.

Comparez les réels x et y :

$$x = 3\ln 2$$

et

$$y = 2\ln 3$$

$$x = \ln 5 - \ln 2$$

et

$$y = \ln 12 - \ln 5$$

Correction Exercice n°2.

$$\blacksquare x = 3\ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8 \text{ et } y = 2\ln 3 = \ln 3^2 = \ln 9$$

Comme la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $8 < 9$; alors $x < y$

$$\blacksquare x = \ln 5 - \ln 2 = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \text{ et } y = \ln 12 - \ln 5 = \ln\left(\frac{12}{5}\right)$$

Comme la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $\frac{5}{2} < \frac{12}{5}$; alors $x < y$

Exercice n°3.

Simplifier au maximum :

$$a = \ln(e^2) ; b = \ln(e^3) ; c = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) ; d = \ln(\sqrt{e}) ; f = \ln(e\sqrt{e})$$

Correction Exercice n°3.

$$\blacksquare a = \ln(e^2) = 2\ln e = 2 \times 1 = 2$$

$$\blacksquare b = \ln(e^3) = 3\ln e = 3 \times 1 = 3$$

$$\blacksquare c = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\ln e^2 = -2\ln e = -2$$

$$\blacksquare d = \ln(\sqrt{e}) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$$

$$\blacksquare f = \ln(e\sqrt{e}) = \ln e + \ln(\sqrt{e}) = 1 + \frac{1}{2}\ln e = \frac{3}{2}$$

Exercice n°4.

Précisez l'ensemble de définition puis résoudre les équations suivantes :

$$1) \ln(2+5x) = \ln(x+6) \quad 2) \ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln 3 \quad 3) \ln x = 2$$

$$4) \frac{2(1+\ln x)}{x} = 0 \quad 5) (\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \quad 6) \ln(2x-5) = 1$$

$$7) \ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) = 0 \quad 8) \ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right) = 0 \quad 9)$$

$$\ln(x-1) = \ln(2x-1) \quad 10) \ln(|x-1|) = \ln(2x-1) \quad 11) \ln(|x-1|) = \ln(|2x-1|)$$

Correction Exercice n°4.

$$1) \boxed{\ln(2+5x) = \ln(x+6)}$$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+5x > 0 \\ x+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{5} \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\frac{2}{5}; +\infty\right[\\ x \in \left]-6; +\infty\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{2}{5}; +\infty \right[\cap] -6; +\infty[\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{2}{5}; +\infty \right[$$

$$\text{Donc : } D_{Et} = \left] -\frac{2}{5}; +\infty \right[$$

$$\ln(2+5x) = \ln(x+6) \Leftrightarrow 2+5x = x+6$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Comme } 1 \in \left] -\frac{2}{5}; +\infty \right[\text{ alors : } \boxed{S = \{1\}} .$$

$$2) \boxed{\ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln 3}$$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]1; +\infty[\\ x \in]3; +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\cap]3; +\infty[\Leftrightarrow x \in]3; +\infty[$$

$$\text{Donc : } D_{Et} =]3; +\infty[$$

$$\ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln 3 \Leftrightarrow \ln((x-1)(x-3)) = \ln 3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 4$$

$$\text{Comme } 0 \notin]3; +\infty[\text{ et } 4 \in]3; +\infty[\text{ alors : } \boxed{S = \{4\}} .$$

$$3) \boxed{\ln x = 2}$$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$$

$$\text{Donc : } D_{Et} =]0; +\infty[$$

$$\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2 \times \ln e$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln e^2$$

$$\Leftrightarrow x = e^2$$

$$\text{Comme } e^2 \in]0; +\infty[\text{ alors : } \boxed{S = \{e^2\}} .$$

$$4) \boxed{\frac{2(1+\ln x)}{x} = 0}$$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$$

$$\text{Donc : } D_{Et} =]0; +\infty[$$

$$\frac{2(1+\ln x)}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\ln e$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Comme $\frac{1}{e} \in]0; +\infty[$ alors : $S = \left\{\frac{1}{e}\right\}$.

5) $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$$

$$\text{Donc : } D_{Et} =]0; +\infty[$$

On pose $X = \ln x$ on obtient : $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 6 = 0$

Que l'on sait résoudre on a comme solutions : $X = 2$ et $X = -3$

$$(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 2 \\ \ln x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^2 \\ x = e^{-3} \end{cases} \quad \text{Donc : } S = \{e^2; e^{-3}\}$$

6) $\ln(2x-5)=1$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow 2x-5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$$

$$\text{Donc : } D_{Et} = \left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$$

$$\ln(2x-5)=1 \Leftrightarrow \ln(2x-5)=\ln e$$

$$\Leftrightarrow 2x-5=e$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e+5}{2}$$

Comme $\frac{e+5}{2} \in]0; +\infty[$ alors : $S = \left\{\frac{e+5}{2}\right\}$.

7) $\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)=0$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-1} > 0$$

Tableau de signe

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$(x-1)$	$-$		0	$+$
$(2x-1)$	$-$	0	$+$	
$\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)$	$+$	0	$-$	$+$

Donc : $D_{Et} =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[$

$$\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)=\ln 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-1}=1$$

$$\Leftrightarrow x - \cancel{1} = 2x - \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Comme $0 \in]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[$ alors : $S = \{0\}$.

8) $\ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right)=0$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow 2x-1 \neq 0 \text{ et } \frac{x-1}{2x-1} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2} \text{ et } x \neq 1 \quad \text{Donc :}$$

$$D_{Et} =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right)=\ln 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{2x-1}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-1}=1 \text{ ou } \frac{x-1}{2x-1}=-1$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{2}{3}$$

Comme $0 \in]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; 1[\cup]1; +\infty[$ et $\frac{2}{3} \in]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; 1[\cup]1; +\infty[$ alors :

$$S = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}.$$

9) $\ln(x-1)=\ln(2x-1)$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]1; +\infty[\\ x \in]\frac{1}{2}; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$$

Donc : $D_{Et} =]1; +\infty[$

$$\ln(x-1)=\ln(2x-1) \Leftrightarrow x-1=2x-1$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

Comme $0 \notin]1; +\infty[$ alors : $\boxed{S = \emptyset}$.

$$10) \boxed{\ln(|x-1|)=\ln(2x-1)}$$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\end{cases} \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty[$$

$$\text{Donc : } D_{Et} = \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty[$$

$$\ln(|x-1|)=\ln(2x-1) \Leftrightarrow |x-1|=2x-1$$

$$\Leftrightarrow x-1=2x-1 \text{ ou } x-1=-2x+1$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{2}{3}$$

Comme $0 \notin \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty[$ et $\frac{2}{3} \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty[$ alors $\boxed{S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}}$

$$11) \boxed{\ln(|x-1|)=\ln(|2x-1|)}$$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ 2x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty[$$

$$\text{Donc : } D_{Et} = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty[= \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$$

$$\ln(|x-1|)=\ln(|2x-1|) \Leftrightarrow |x-1|=|2x-1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2x-1 \\ x-1=-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Comme $0 \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$ et $\frac{2}{3} \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$ alors $\boxed{S = \left\{ 0; \frac{2}{3} \right\}}$

WWW.GUESSMATHS.CO