

Exercice 1

Partie A

On pose : $P(z) = z^3 - 5iz^2 - (7 + 4i)z - 12 + 3i$

- 1) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet, dans $\mathbb{C}$ une solution imaginaire z_0 que l'on précisera.
- 2) Déterminer les nombres complexes b et c tels que : $(\forall z \in \mathbb{C}), P(z) = (z - 3i)(z^2 + bz + c)$.
- 3) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère les points A d'affixe $z_A = 3i$; B d'affixe $z_B = -\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2})$; C d'affixe $z_C = \sqrt{2} + i(1 + \sqrt{2})$ et I le milieu du segment $[BC]$ (on note z_I son affixe).

- 1) a) Déterminer z_I et donner la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_A - z_I}{z_C - z_I}$, déduire que le triangle AIC est isocèle et donner une mesure de l'angle $(IC; IA)$.
- b) Montrer que ABC est un triangle rectangle en A .
- c) Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$; placer le point A , tracer le cercle circonscrit au triangle ABC et puis placer les points B et C .
- 2) On pose $w = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$
 - a) Déterminer une mesure de l'angle $(BC; BA)$.
 - b) Calculer $\frac{BA}{BC}$ et déduire la forme trigonométrique de w .
 - c) Donner la forme algébrique de w et déduire $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 2

Montrez qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ soient dans le plan complexe, les sommets d'un triangle équilatéral est :

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_1z_3 = 0.$$

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1): $\frac{z-2}{z-1} = z$

On donnera le module et un argument de chaque solution.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (2): $\frac{z-2}{z-1} = i$.

On donnera la solution sous forme algébrique.

3) Soit M ; A et B les points d'affixes respectives : z ; 1 et 2 .

On suppose que M est distinct des points A et B .

a) Interpréter le module et l'argument de $\frac{z-2}{z-1}$?

b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).

4) a) Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$ dans $\mathbb{C}$; où n désigne un entier naturel non nul, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (3): $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$

On cherchera les solutions sous forme algébrique.