EXERCICES-

« GENERALITES SUR LES FONCTIONS » *1 Bac SM*

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x\sin x}{x^2+1}$.

1) Étudier la parité de f .

2) Montrer que f est bornée par $-\dfrac{1}{2}$ *et* $\dfrac{1}{2}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x-1-\sqrt{2x-3}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f .

2) Montrer que $f(2)$ est la valeur minimal de f .

3) Montrer que : $\left(\forall x\in\left[\dfrac{3}{2};2\right]\right)\ :\ f(x)\leq\dfrac{1}{2}$

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies sur $I=[2,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ *et* $g(x)=\sqrt{x+2}$

1) a) Montrer que f est minorée par 0 et majorée par 1.

b) 1 est-il un maximum ? 0 est - il un minimum ?

2) Soient a,b deux réels distincts de I .

Montrer que : $T_{(a,b)}=\dfrac{(2a+1)(2-b)+(2b+1)(2-a)}{(a^2+1)(b^2+1)}$ *et déduire que f est décroissante sur I .*

3) On considère la fonction h définie sur $I=[2,+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{4\sqrt{x+2}-3}{x+3}$

Vérifier que $h=f\circ g$ et déduire le sens de variation de h .

Exercice 4

1) Montrer que pour tout réel x on a : $2E(x)\leq E(2x)\leq 1+2E(x)$

2) Montrer que pour tout réel x on a : $E\left(\dfrac{E(2x)}{2}\right)=E(x)$

3) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :\ E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$

4) Montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :\ \sum_{k=0}^{n}\left(\left[\dfrac{2k}{3}\right]\right)=\left[\dfrac{n^2}{3}\right]$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+a^2}$ *avec* $a\in\mathbb{R}^{+*}$

1) Montrer que f est impaire

2) Soient x, y deux réels distincts de $\mathbb{R}$. Montrer que $T_{(x,y)} = \dfrac{a^2 - xy}{(x^2+a^2)(y^2+a^2)}$

3) Etudier le sens de variation de f sur $[0,a]$ et $[a,+\infty[$

4) En déduire que f est bornée.

Exercice 6

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{3}x$ et $g(x) = \sqrt{x-2}$

Soient (C) et (C') les courbes représentatives respectivement de f et g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Dresser les tableaux de variations de f et g

2) a) Vérifier que (C) et (C') passent par les points $A(2,0)$, $B(3,1)$

b) Représenter (C) et (C') puis résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$

3) On considère la fonction h définie par : $h = f \circ g$

a) Déterminer le domaine de définition de h et calculer $h(x)$

b) Etudier les variations de h sur $[2,3]$ et $[3,+\infty[$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x - E(x)}{\sqrt{x}}$

1) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a: $f(x) < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2) En déduire que f est majorée .

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x) = x + 3 - 2\sqrt{x+1}$

1) Montrer que f est croissante sur $[0,+\infty[$.

2) En déduire que $(\forall a \geq 1)$: $\sqrt{a+1} - \sqrt{a} \leq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 9

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2 + 2x$ et $g(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ Soient (C) et (C') les courbes représentatives respectivement de f et g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Dresser les tableaux de variations de f et g.

2) Déterminer l'intersection de C_f et C_g .

3) Construire C_f et C_g dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x).g(x) \prec 0$

5) a) Montrer que le domaine de définition de $h = g \circ f$ est $D =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

b) Déterminer graphiquement $f(]-1,+\infty[)$

c) Étudier les variations de $h = g \circ f$

Exercice 10

On considère la fonction f *définie sur* $]0;1[$ *par :* $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{1-x}\right)$

1) Étudier les variations de f *sur* $\left[\frac{1}{2};1\right[$ *et sur* $\left]0;\frac{1}{2}\right]$.

2 En déduire que : $\left(\forall(a,b)\in\left]0,+\infty\right[^2\right):\ a+b=1\Rightarrow\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geq 9$

Exercice 11

Résoudre graphiquement l'équation (E)*:* $x\in\mathbb{R}\ ;\ \sqrt{1-x^2}\succ x^4-4x^2+1$