Exercice 1 *09 pts*

I) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *, on pose :* $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ *et* $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

a-Etudier la monotonie de la suite (I_n)

b-Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on a :* $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

c- Déduire que (I_n) *converge vers une limite que l'on précisera.*

II) Soit f_0 *et* f_2 *les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *et* $f_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

Soient ζ_0 *et* ζ_2 *leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On pose pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$; $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$

1) a- Montrer que F est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ *et calculer* $F'(x)$ *pour tout* $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

b- Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$*, on a :* $F(x) = x$

c- Déduire que : $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$

d- Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

e- Déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$

f- Calculer alors l'aire $\mathcal{A}$ *de la partie du plan limitée par les courbes* ζ_0 *et* ζ_2.

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer le volume $\mathcal{V}$ *du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc* $OA = \{M(x;y) / y = f_2(x)$ *et* $0 \le x \le 1\}$ *et de* ζ_2 *autour de l'axe des abscisses.*

Exercice 2 *(8 points)*

Le plan P est muni d' un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité graphique* 3cm *).*

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ *,par :* $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On note (C) *sa courbe représentative dans le plan P.*

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) a) Montrer que pour tout réel $t \in [0;+\infty[$; $1 - t \le \frac{1}{1+t} \le 1 - t + t^2$.

b) En déduire que pour tout réel $x \in [0;+\infty[$; $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

3) a) Montrer que pour tout réel $x > 0$; $-\frac{1}{2} \le \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \le -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

b) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = -\frac{1}{2}$

4) a) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$; $\frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t}$.

b) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$; $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$

5) a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$; $f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)\right)$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe (on précisera la demi tangente au point d'abscisse 0)

Exercice 3 (5 points)

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$

1) a) Montrer que pour tout $x \in [1;e]$ et pour tout entier non nul n on a : $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \geq 0$.

b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2) a) Calculer I_1.

b) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier non nul n ,on a :
$I_{n+1} = e - (n+1) I_n$.

c) En déduire I_2 ; I_3 et I_4.

3) a) Montrer que pour tout entier non nul n, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

b) Etudier alors la convergence de (I_n).

4) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 4 (9 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

1) Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par: $u(x) = x^2 - 1 + 2\ln x$.

a) Étudier les variations de u sur $]0;+\infty[$.

b) Calculer $u(1)$ et déduire le signe de $u(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.

2) a) Montrer que pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Démontrer que la droite Δ d'équation : $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Déterminer la position relative de la courbe (C) et de la droite Δ.

c) Tracer la courbe (C) et la droite Δ.

4) On note α un réel de l'intervalle $]1;+\infty[$ et on désigne par $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $A(\alpha)=1-\frac{1}{\alpha}-\frac{\ln\alpha}{\alpha}$.

b) Déterminer $\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

Exercice 5(*3.5 points)*

Pour tout entier naturel non nul n on pose : $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

2) Monter que pour tout entier $n\geq 2$ *on a :* $I_n=\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}I_{n-1}$.

3) Calculer I_2 *et* I_3.