Problème

Partie 1

Soit : la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ *par :* $f(x)=\dfrac{1}{2+\arctan x}$ *et la suite* (u_n) *définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) Montrer que l'équation : $f(x)=x$ *admet une solution unique* α *dans* $[0;+\infty[$ *et que :* $0<\alpha<1$.

2) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;1[)$ *;* $|f'(x)| \le \dfrac{1}{4}$ *et que :* $f([0;1]) \subset [0;1]$

b) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ *;* $0 \le u_n \le 1$

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ *;* $|u_{n+1}-\alpha| \le \dfrac{1}{4}|u_n-\alpha|$

b) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ *;* $|u_n-\alpha| \le \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ *puis déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Partie 2

Soit g_n *la fonction définie sur* $[0;+\infty[$ *par :* $g_n(x)=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{x}{n}\right)}+\dfrac{x}{2}-2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

1) a) vérifier que : $(\forall x \ge 0)$ *;* $g_n(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)+\dfrac{x}{2}$ *et que* g_n *réalise une bijection de* $\mathbb{R}^+$ *vers* $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que l'équation $g_n(x)=1$ *admet une solution unique* α_n *dans* $\mathbb{R}^+$ *et que* $0<\alpha_n<2$.

2) a) Montrer que : $(\forall x \ge 0)$ *;* $g_{n+1}(x) \le g_n(x)$ *puis déduire les variations de* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente a*

c) calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)$ *déduire que:* $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=2$

3) Montrer que : $2\alpha_n\left(\dfrac{\arctan\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)}{\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)}\right)=n(2-\alpha_n)$ *puis déduire la valeur de :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n(2-\alpha_n)\right)$

4) a) Montrer que : $(\forall x \ge 0)$ *;* $\arctan(x) < x$ *puis déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$ *;* $1<\alpha_n$

b) En appliquant le TAF à la fonction : $t \mapsto \sqrt[n]{t}$ *sur l'intervalle* $[1;\alpha_n]$ *; Montrer que :*

WWW.GUESSMATHS.CO

$1 < \sqrt[n]{\alpha_n} < 1 + \frac{1}{n}$; *déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{\alpha_n} \right)$.

5) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n\left(\sqrt[n]{\alpha_n} - 1 \right) \right) = \ln 2$

WWW.GUESSMATHS.CO