

I. Rappels

1) Définitions :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O .

Pour tout nombre réel x , considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x .

À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.

On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M .

Définitions :

- Le cosinus du nombre réel x est l'abscisse de M et on note **cos** x .

- Le sinus du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note **sin** x .

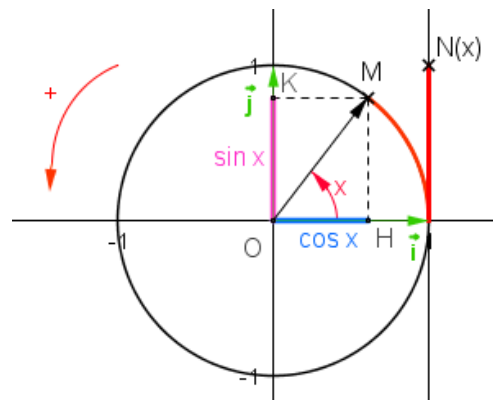
Propriétés :

Pour tout nombre réel x , on a :

$$1) -1 \leq \cos x \leq 1 \quad 2) -1 \leq \sin x \leq 1 \quad 3) \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

2) Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



II. Propriétés des fonctions cosinus et sinus

1) Périodicité

Propriétés :

$$1) \cos x = \cos(x + 2k\pi) \text{ où } k \text{ entier relatif}$$

$$2) \sin x = \sin(x + 2k\pi) \text{ où } k \text{ entier relatif}$$

Remarque :

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .

Méthode : Résoudre une équation trigonométrique

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos^2 x = \frac{1}{2}$.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

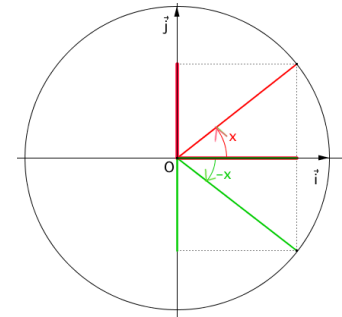
$$\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \text{ ou } \cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Ainsi : } S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi ; -\frac{\pi}{4} + 2k_2\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k_3\pi ; -\frac{3\pi}{4} + 2k_4\pi \right\} \text{ avec } k_i \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Soit : } S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$



2) Parité

Propriétés :

Pour tout nombre réel x , on a :

$$1) \cos(-x) = \cos x$$

$$2) \sin(-x) = -\sin x$$

Remarque :

On dit que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.

Définitions :

Une fonction f est paire lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D , $-x$ appartient à D et $f(-x) = f(x)$.

Une fonction f est impaire lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D , $-x$ appartient à D et $f(-x) = -f(x)$.

Conséquences :

- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

3) Autres propriétés

Propriétés : Pour tout nombre réel x , on a :

$$1) \cos(\pi + x) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$2) \cos(\pi - x) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$3) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$4) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

III. Dérivabilité et variations

1) Dérivabilité

Propriété :

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables en 0 et on a :

$$\cos'(0) = 0 \text{ et } \sin'(0) = 1.$$

Théorème :

les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \text{ et } \sin'(x) = \cos(x)$$

Démonstration :

- Soit x un nombre réel et h un nombre réel non nul.

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

Or, cosinus et sinus sont dérivables en 0 de dérivées respectives 0 et 1 donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} = 0 \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = 1 \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x.$$

- Soit x un nombre réel et h un nombre réel non nul.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x}{h} \\ &= \sin x \frac{\cosh - 1}{h} + \cos x \frac{\sinh}{h} \end{aligned}$$

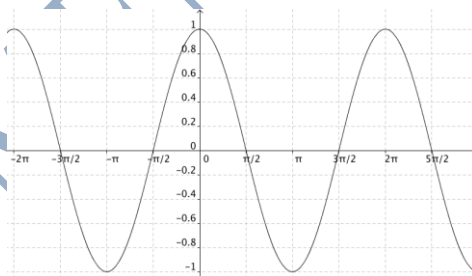
$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x.$$

2) Variations

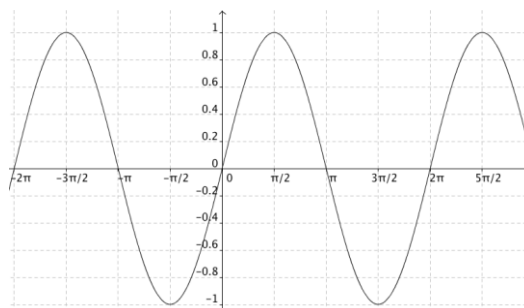
x	0	π
$\cos' x = -\sin x$	0	0
$\cos x$	1	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin' x = \cos x$	1	0	-1
$\sin x$	0	1	0

3) Représentations graphiques



Fonction cosinus



Fonction sinus

Méthode :

Etudier une fonction trigonométrique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$.

- 1) Etudier la parité de f .
- 2) Démontrer que la fonction f est périodique de période π .
- 3) Etudier les variations de f .
- 4) Représenter graphiquement la fonction f .

1) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(-x) = \cos(-2x) - \frac{1}{2} = \cos(2x) - \frac{1}{2} = f(x)$

La fonction f est donc paire. Dans un repère orthogonal, sa représentation graphique est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \cos(2(x + \pi)) - \frac{1}{2} \\ &= \cos(2x + 2\pi) - \frac{1}{2} \\ &= \cos(2x) - \frac{1}{2} = f(x) \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est périodique de période π .

3) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = -2\sin(2x)$.

Si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $2x \in [0; \pi]$ et donc $\sin(2x) \geq 0$.

Donc si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $f'(x) \leq 0$. Ainsi f est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{3}{2}$

4)

