GUESSMATHS

Revue n°2 :

Chapitre « Suites Numériques»

2éme Bac SC. Maths A et B

Contenue du chapitre :

- Résumé du cours
- Exercices d'application
- Astuces et méthodes
- Série d'exercices corrigés

1er Conseil aux bacheliers afin de bien préparer leur Examen

Comme dit le proverbe français « rien ne se perd rien ne se crée tout se transforme »
Alors le secret de la réussite c'est de travailler régulièrement.

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com WhatsApp : 0717467136

les suites numériques

Définitions :

1) on dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si : $(\forall n\geq n_0); u_n\leq u_{n+1}$

2) on dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si : $(\forall n\geq n_0); u_n\geq u_{n+1}$

4) on dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante si $(\forall n\geq n_0); u_n = u_{n+1}$

5) on dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante

Suites bornées

Définition :

1) on dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $(\forall n\geq n_0); u_n\leq M$

2) on dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall n\geq n_0); m\leq u_n$

3) une suite est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée

$(\forall n\geq n_0); m\leq u_n\leq M$

Remarque : $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée ssi $(|u_n|)_{n\geq n_0}$ est majorée

Suite arithmétique :

Définition :

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est arithmétique s'il existe un réel r tel que :

$(\forall n\geq n_0); u_{n+1}=u_n+r$. le réel r s'appelle la raison de la suite arithmétique $(u_n)_{n\geq n_0}$

1) Trois réels a ,b et c dans cet ordre sont en progression arithmétique si : $a+c=2b$

2) Terme général d'une suite arithmétique

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r alors :

$(\forall n\geq n_0)(\forall p\geq n_0); u_n=u_p+(n-p)r$

Si le premier terme est u_0 alors : $(\forall n\geq n_0); u_n=u_0+n\times r$

3) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r alors :

$$u_p+u_{p+1}+\cdots+u_n=(n-p+1)\left(\frac{u_p+u_n}{2}\right)$$

Exemple : $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Suite géométrique

Définition :

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que :

$(\forall n\geq n_0); u_{n+1}=qu_n$. Le réel q s'appelle la raison de la suite géométrique $(u_n)_{n\geq n_0}$

1) Trois réels a , b et c dans cet ordre sont en progression géométrique si : $a\times b=c^2$

2) Terme général d'une suite géométrique

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q alors : $(\forall n\geq n_0)(\forall p\geq n_0); u_n=u_p\times q^{n-p}$

Si le premier terme est u_0 alors : $u_n = u_0 \times q^n$

3) somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q tel que $q \neq 1$ alors :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$$

Exemple : $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ si $a \neq 1$

Définition :

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite

1) On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$ si : $(\forall A > 0)(\exists N \in IN) / (\forall n \geq N) : u_n > A$

On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) on dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $-\infty$ si : $(\forall A > 0)(\exists N \in IN) / (\forall n \geq N) : u_n < -A$

On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

3) Soit $l \in IR$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers l si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in IN) / (\forall n \geq N) : |u_n - l| < \varepsilon$

On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Remarque : la limite si elle existe est unique

Exemples : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$ avec $p \in IN^*$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$

Définition :

Si une suite admet une limite finie on dit qu'elle est convergente sinon on dit qu'elle est divergente

Remarque :

* Si une suite est convergente alors sa limite est unique
* Toute suite convergente est bornée

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - l) = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$

Théorèmes de comparaison :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que à partir d'un certain rang n_0 on a : $u_n \leq v_n$

1) Si (u_n) et (v_n) sont convergentes alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

2) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

3) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Critères de convergence :

1) Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites numériques telles que à partir d'un certain

rang n_0 on a : $v_n \le u_n \le w_n$

Si (v_n) et (w_n) sont convergentes vers la même limite l alors (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

2) Si $|u_n - l| < v_n$ à partir d'un certain rang n_0 et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

<u>La monotonie et la convergence</u> :

1) Toute suite croissante et majorée est convergente
2) Toute suite décroissante et minorée est convergente
3) Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$
4) toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

<u>Limite de (q^n)</u> :

Si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ et si $|q| < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

Si $q \le -1$ alors (q^n) n'a pas de limite.

<u>Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$</u>

<u>Théorème</u> :

Soit I un segment, et soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si I est continue sur I, $f(I) \subset I$ et (u_n) est convergente, alors la limite de (u_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$.

<u>Suite de la forme $u_n = f(v_n)$</u>

Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$ et f est continue en l , alors (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = f(l)$

<u>Suites adjacentes</u>

<u>Définition</u> :

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si :

1) la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante
2) $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

<u>Théorème</u> :

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles sont convergentes vers la même limite

<u>Limites des suites : Méthodes</u>

1) Si on veut montrer qu'une suite (u_n) est monotone.

- **On peut** étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- **On peut** comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 avec où $u_n \ne 0$.
- **On peut** comparer u_0 et u_1 ; puis faire une démonstration par récurrence.
- **On peut** si (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, utiliser les variations de f et faire une démonstration par récurrence.

2) Si on veut montrer qu'une suite (u_n) est convergente.

- **On peut** montrer que (u_n) est croissante majorée (ou décroissante minorée).
- **On peut** encadrer (u_n) par deux suites convergentes de même limite.
- **On peut** déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en utilisant les opérations sur les limites.
- **On peut** montrer que $|u_n - l| \le v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

3) Si on veut montrer qu'une suite (u_n) est divergente.

- **On peut** déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
- **On peut** trouver une suite (v_n) telle que $u_n \le v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ ou telle que $u_n \ge v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- **On peut** supposer que (u_n) converge vers l et on aboutit à une contradiction.

4) Si on veut chercher la limite d'une suite convergente (u_n).

- **On peut** déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en utilisant les opérations sur les limites des suites, si possible.
- **On peut** chercher le point fixe, c'est-à-dire la solution de l'équation $f(x) = x$ où f est une fonction continue sur un segment I telle que $u_{n+1} = f(u_n)$
- **On peut** écrire u_n sous la forme $u_n = f(v_n)$ où f est une fonction continue sur un segment I et (v_n) une suite convergente vers un réel appartenant à I.

5) Si on veut montrer que : $(\forall n \in IN)$; $|u_{n+1} - l| \le k|u_n - l|$

- **On peut** utiliser la différence et l'encadrement.
- **On peut** utiliser l'inégalité des accroissements finis.

6) Si on veut montrer que : $(\forall n \in IN)$; $|u_n - l| \le k^n |u_0 - l|$

- **On peut** montrer par récurrence.
- **On peut** utiliser la méthode d'itération. (produit terme à terme)

7) Si on veut montrer que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes,

- **On peut** utiliser la définition.
- **On peut** montrer que (u_n) est croissante majorée, (v_n) est décroissante minorée, appeler l et l' leurs limites et montrer que $l = l'$.

EXERCICESV SUR LES SUITES NUMERIQUES

EXERCICE 1

Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\ge1}$ dans chaque cas suivant :

$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+k}}$	$u_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1)}{\sum\limits_{k=1}^{n} k}$
$u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$	$u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ $0 < a < b$

CORRECTION

- $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^2+k}}$

__ $1 \le k \le n \Rightarrow \sqrt{n^2+1} \le \sqrt{n^2+k} \le \sqrt{n^2+n}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^2+k}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}} \le U_n \le \frac{n^2}{\sqrt{n^2+1}}$$

Donc : $\left(\forall n \in IN^*\right)\ \mathrm{U}_n \ge \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}}$

Et $\lim_{x\to+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n^2}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = +\infty$

D'où : $\lim_{x\to+\infty} U_n = +\infty$

- $U_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}(2k+1)}{\sum_{k=1}^{n} k}$

On a : $\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(3+2n+1)\times n}{2} = n(n+2)$

Et $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Donc : $U_n = \frac{n(n+2)}{\frac{n(n+1)}{2}} = 2\times\frac{n+2}{n+1}$

D'où : $\lim_{x\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\times \cancel{n}\times\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\times\left(1+\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}}\right) = 2$$

- $U_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$

$$(\forall n\in IN^*)\ U_n=\frac{1-\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{(-1)^n}{n}}$$

On a : $(\forall n\in IN^*)\ -\frac{1}{n}\leq\frac{(-1)^n}{n}\leq\frac{1}{n}$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{n}\right)=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}U_n=1$

EXERCICE 2

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=u_n+\frac{1}{2^n}\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

Exprimer u_n en fonction de n ,puis déterminer la limite de (u_n).

CORRECTION

On a : $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{2^n}\Rightarrow\sum\limits_{k=0}^{n-1}(U_{k+1}-U_k)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$\Rightarrow U_n-U_0=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow U_n=1+2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=3\quad\left(car\ :-1<\frac{1}{2}<1;\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0\right)$

EXERCICE 3

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases}U_0=4\\ U_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{U_n}+U_n\right)\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1) a-Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}):U_n>\sqrt{3}$

b- Montrer que la suite(U_n) est décroissante.

c- En déduire que (U_n) est convergente

2) a - Montrer que:$(\forall n\in IN)$; $U_{n+1}-\sqrt{3}\leq\frac{1}{2}(U_n-\sqrt{3})$

b - En déduire par récurrence que : $(\forall n\in IN)$: $U_n-\sqrt{3}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-\sqrt{3})$

c- Calculer la limite de (U_n)

CORRECTION

1) a) • Pour $n=0$ $U_0 = 4 > \sqrt{3}$

• Soit $n \in IN$

Supposons que $U_n > \sqrt{3}$ et montrons que $U_{n+1} > \sqrt{3}$

On a : $U_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{U_n} + U_n\right) - \sqrt{3}$

$$= \frac{3 + U_n^2 - 2\sqrt{3}U_n}{2U_n}$$

$$= \frac{\left(U_n - \sqrt{3}\right)^2}{2U_n}$$

donc : $U_{n+1} > \sqrt{3}$

Conclusion :

On a montré par récurrence que $(\forall n \in IN)$ $U_n > \sqrt{3}$

b) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{U_n} + U_n\right) - U_n$

$$= \frac{3 - U_n^2}{2U_n}$$

Et $U_n > \sqrt{3}$ donc : $U_n^2 > 3$ alors :$U_{n+1} - U_n < 0$

D'où : (U_n) est une suite décroissante

c) (U_n) est une suite décroissante et minorée donc elle est convergente.

2) a) On a : $\frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{3}\right) - \left(U_{n+1} - \sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{3}\right) - \frac{\left(U_n - \sqrt{3}\right)^2}{2U_n}$

$$= \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{3}\right)\left(1 - \frac{U_n - \sqrt{3}}{U_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{3}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{U_n}$$

Or $U_n > \sqrt{3}$ alors $U_n - \sqrt{3} > 0$ et $\frac{\sqrt{3}}{U_n} > 0$

Donc : $(\forall n \in IN)$ $\left(U_{n+1} - \sqrt{3}\right) \le \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{3}\right)$

b) Montrons par récurrence que :

$(\forall n \in IN)$; $U_n - \sqrt{3} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(4 - \sqrt{3}\right)$

• Pour $n = 0$

On a : $U_0 - \sqrt{3} = 4 - \sqrt{3} \le \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(4 - \sqrt{3}\right)$

Donc la proposition est vraie.

• Soit $n \in IN$

Supposons que : $\left(U_n-\sqrt{3}\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(4-\sqrt{3}\right)$

Et montrons que : $\left(U_{n+1}-\sqrt{3}\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(4-\sqrt{3}\right)$

On a d'après la question 2) b) :

$(\forall n\in IN)\ \left(U_{n+1}-\sqrt{3}\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right)\left(U_n-\sqrt{3}\right)$

Donc : $U_{n+1}-\sqrt{3}\leq\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(4-\sqrt{3}\right)$

Alors : $U_{n+1}-\sqrt{3}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(4-\sqrt{3}\right)$

D'où la proposition est vraie pour $(n+1)$

Conclusion :

On a montré par récurrence que :

$(\forall n\in IN)\ ;\ U_n-\sqrt{3}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(4-\sqrt{3}\right)$

c) On a : $(\forall n\in IN)\ \ 0<U_n-\sqrt{3}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(4-\sqrt{3}\right)$

alors : $\left|U_n-\sqrt{3}\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(4-\sqrt{3}\right)$

Or : $-1<\frac{1}{2}<1$ donc : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(4-\sqrt{3}\right)=0$

D'où : $\lim_{n\to+\infty}U_n=\sqrt{3}$

EXERCICE4

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie les conditions suivantes :

- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$
- $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\left|f(x)-f(y)+x-y\right|\leq\frac{1}{2}|x-y|$

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases}u_0=\dfrac{\alpha}{2}\\ u_{n+1}=f(u_n)+u_n\quad;\quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

a- Montrer que :$(\forall n\in\mathbb{N})\ \ \left|u_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{1}{2}\left|u_n-\alpha\right|$

b- En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

c-On pose : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ S_n=\sum_{k=0}^{n}f(u_k)$.

Montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite .

CORRECTION

1) Soit $(x;y)\in IR^2$ tel que : $x\neq y$; $|f(x)-f(y)+x-y|\leq\frac{1}{2}|x-y|$ $\Rightarrow \frac{|f(x)-f(y)+x-y|}{|x-y|}\leq\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}+1\right|\leq\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -1-\frac{1}{2}\leq\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq -1+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}\leq\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq-\frac{1}{2}<0$$

Donc f est strictement décroissante sur IR

Et f est continue sur IR, alors f est bijective de IR vers $f(IR)=\left]\lim_{x\to+\infty}f(x);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=IR$

Et $0\in f(IR)$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans IR.

2) a) $\forall(x;y)\in IR^2$; $|f(x)-f(y)+x-y|\leq\frac{1}{2}|x-y|$

Pour $x=U_n$ et $y=\alpha$

On obtient : $|f(U_n)-f(\alpha)+U_n-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

Donc : $|U_{n+1}-\cancel{U_n}+\cancel{U_n}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

D'où : $\boxed{|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|}$

b) Montrons par récurrence que :

$(\forall n\in IN)\quad |U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

- pour n=0

On a : $|U_0-\alpha|=\left|\frac{\alpha}{2}-\alpha\right|=\left|\frac{\alpha}{2}\right|\leq\frac{\alpha}{2}$

Donc : la proposition est vérifiée pour n=0

- Soit $n\in IN$

Supposons que : $|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Et montrons que : $|U_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

D'après la question 2) a) on a :

$|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

Et par hypothèse de récurrence $|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Donc : $|U_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)$

D'où : $|U_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Conclusion :

On a montré par récurrence que :

$(\forall n \in IN)\quad |U_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)=0\quad \left(car\ \ -1<\frac{1}{2}<1\right)$

D'après les critères de convergence ,(U_n) est convergente ; et on a : $\lim\limits_{n\to\infty} U_n=\alpha$

c) Soit $(n\in IN)\quad S_n=\sum_{k=0}^{n} f(U_k)$

$$=\sum_{k=0}^{n}(U_{k+1}-U_k)$$

$$=U_{n+1}-U_0=U_{n+1}-\frac{\alpha}{2}$$

Et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\alpha$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}=\alpha$

Donc (S_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\alpha-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{\alpha}{2}}$$

EXERCICE 5

On considère les deux suites numériques (U_n) et (V_n) définies par : $U_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}$ et

$V_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{3^k}$

1) Déterminer la limite de la suite (U_n)

2) Montrer que : $(\forall n\in IN)\quad 3V_{n+1}=U_n+V_n$.

3) Montrer que : $(\forall n\in \mathbb{N})\quad V_n\le 3$.

4) En déduire que la suite(V_n) est convergente et déterminer sa limite.

CORRECTION

1) $U_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}=\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$

$$=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Or :$-1<\frac{1}{3}<1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=0$

D'où : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{3}{2}}$

2) On a : $3V_{n+1} = 3\sum_{k=0}^{n+1}\frac{k}{3^k}$

$$= 3\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{3^k}$$

$$= 3\sum_{p=0}^{n}\frac{p+1}{3^{p+1}} \qquad (p = k-1)$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\frac{p}{3^p} + \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{3^p}$$

$$= V_n + U_n$$

Donc : $\boxed{(\forall n\in IN)\quad 3V_{n+1} = U_n + V_n}$

3) Montrons par récurrence que : $(\forall n\in IN)\ V_n \le 3$

- pour n=0

On a : $V_0 = 0 \le 3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

- Soit n∈ℕ

Supposons que : $V_n \le 3$ et montrons que : $V_{n+1} \le 3$

On a : $V_n \le 3$ et $U_n \le \frac{3}{2}$

Donc : $V_n + U_n \le 3 + \frac{3}{2}$

Alors : $\frac{V_n + U_n}{3} \le \frac{3}{2}$

D'où : $V_{n+1} \le \frac{3}{2} \le 3$

•) Conclusion :

On a montré par récurrence que : $(\forall n\in IN)\ V_n \le 3$

4) On a : $V_{n+1} - V_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} > 0$

Donc : (V_n) est une suite croissante et majorée par 3

D'où : (V_n) est une suite convergente

On pose : $\lim_{n\to+\infty} V_n = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} V_{n+1} = l$.

On a d'après ce qui précède $3V_{n+1} = V_n + U_n$; alors : $\lim_{n\to+\infty} 3V_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}(V_n + U_n)$

Donc : $3l = l + \frac{3}{2}$

Alors : $l = \frac{3}{4}$

D'où : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{3}{4}}$

EXERCICE 7

Pour tout $n \in IN^*$ on pose : $U_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n} E(kx)$ où $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

CORRECTION

Pour tout $x \in IR$ et Pour tout $n \in IN^*$, on a :

$$kx - 1 < E(kx) \le kx \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \le \sum_{k=1}^{n} kx$$

$$\Rightarrow x\sum_{k=1}^{n} k - n < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \le x\sum_{k=1}^{n} k$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2n^2}\cdot x - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx) \le \frac{n(n+1)}{2n^2}\cdot x$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2n}\cdot x - \frac{1}{n} < U_n \le \frac{n+1}{2n}\cdot x$$

Or : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\cdot x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\cdot x\right) = \frac{x}{2}$

D'où : (U_n) est convergente et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{x}{2}}$$

EXERCICE 7

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \arctan\left(\frac{1+\sqrt{\tan U_n}}{2}\right) \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})\quad 0 \le U_n < \frac{\pi}{4}$

2) Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

CORRECTION

1/ Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le U_n \le \frac{\pi}{4}$

- Pour n=0 : $U_0 = 0$

On a : $0 \le U_0 \le \frac{\pi}{4}$

Donc la proposition est vraie pour n=0

- Soit $n \in \mathbb{N}$:

Supposons que : $0 \le U_n \le \frac{\pi}{4}$ et montrons que : $0 \le U_{n+1} \le \frac{\pi}{4}$

On a : $0 \le U_n \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le \tan U_n \le 1$ et $0 \le \frac{1+\sqrt{\tan U_n}}{2} \le 1$

D'où $0 \le \arctan\left(\frac{1+\sqrt{\tan U_n}}{2}\right) \le \frac{\pi}{4}$

Donc : $0 \le U_{n+1} \le \frac{\pi}{4}$

Conclusion :

On a montré par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \le U_n \le \frac{\pi}{4}$

2/ pour n=0

On a : $U_0 = 0$ et $U_1 = \arctan\frac{1}{2}$ donc $U_0 < U_1$

Soit n∈ℕ

Supposons que $U_n < U_{n+1}$ et montrons que $U_{n+1} < U_{n+2}$

On a : $0 \le U_n < U_{n+1} < \frac{\pi}{2}$

Alors : $\tan U_n < \tan U_{n+1}$ $\quad \left(la \;\; fonction \; \tan \; est \nearrow sur \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$

Donc : $\frac{1+\sqrt{\tan U_n}}{2} < \frac{1+\sqrt{\tan U_{n+1}}}{2}$

D'où : $\arctan\left(\frac{1+\sqrt{\tan U_n}}{2}\right) < \arctan\left(\frac{1+\sqrt{\tan U_{n+1}}}{2}\right)$

Alors : $U_{n+1} < U_{n+2}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} < U_{n+2}$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n < U_{n+1}$

D'où (U_n) est strictement croissante et (U_n) est majorée par $\frac{\pi}{4}$ donc elle est convergente

- Soit : $f(x) = \arctan\left(\frac{1+\sqrt{\tan x}}{2}\right); \; \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

$U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_0 = 0 \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right[$

On a :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \arctan\left(\frac{1+\sqrt{\tan x}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(Car $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$)

$$= f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc f est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

- $h : x \to \tan x$ est continue et positive sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ $\quad h\left(\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right) \subset \mathbb{R}$

D'où f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

$\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)\ 0\leq f(x)<\frac{\pi}{4}$ donc : $f\left(\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)\subset\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et (U_n) est une suite convergente donc

$\lim_{x\to+\infty}U_n$ est solution de l'équation : $f(x)=x$ Soit $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

$$f(x)=x\Leftrightarrow\arctan\left(\frac{1+\sqrt{\tan x}}{2}\right)=x$$
$$\Leftrightarrow 2\tan x-\sqrt{\tan x}-1=0$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{\tan x}=1$$
$$\Leftrightarrow\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

Donc l'équation $f(x)=x$ admet 2 solutions $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$ on démontre par récurrence que :

$0\leq U_n\leq\frac{\pi}{4}$ donc $\frac{\pi}{2}$ n'est pas solution. D'où : $\lim_{x\to+\infty}U_n=\frac{\pi}{4}$

EXERCICE 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :$(\forall n\geq1)\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

1) Montrer que:$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$ 2) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3) En déduire que la suite$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente est que $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

CORRECTION

1/ Soit $n\in\mathbb{N}^*$:

On a : $U_{2n}-U_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$

Soit : $n+1\leq k\leq 2n$

Alors : $\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{k}\leq\frac{1}{n+1}\Rightarrow\quad\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}\leq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\leq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{n+1}$

Donc : $\frac{n}{2n}\leq U_{2n}-U_n\leq\frac{n}{n+1}$

D'où : $U_{2n}-U_n\geq\frac{1}{2}$

2/ On a : $U_{n+1}-U_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}>0$

Alors : (U_n) est strictement croissante

3/ Supposons que (U_n) est majorée et comme (U_n) croissante alors (U_n) est convergente . On pose :$l=\lim_{n\to+\infty}U_n$ alors $\lim_{n\to+\infty}U_{2n}=l$ et on a : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)U_{2n}-U_n\geq\frac{1}{2}$

Donc : $\lim_{n\to+\infty}(U_{2n}-U_n)\geq\frac{1}{2}$

Alors : $(l-l)\geq\frac{1}{2}$

D'où : $0\geq\frac{1}{2}$ Ce qui est absurde

Donc (U_n) ne peut pas être majorée, et comme (U_n) est croissante alors elle est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

EXERCICE 9

Soit f_n la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f_n(x) = x - n + n\sin x$ où $n \in IN^*$

1) a- Etudier les variations de f_n .

b- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ une solution unique α_n .

c- Vérifier que : $\sin(\alpha_n) = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$

2) a- Montrer que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$

b- En déduire que la suite (α_n) est croissante

c- Montrer que la suite (α_n) est convergente

d- Calculer la limite de $\sin\alpha_n$ en déduire la limite de α_n

CORRECTION

1) a- f_n est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, et on a : pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; $f_n'(x) = 1 + n\cos x$

$n \ge 1$ et $\cos x \ge 0$ donc $1 + n\cos x > 0$

Alors $f_n'(x) > 0$ d'où f_n est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b- f_n est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $f_n(0) = -n$ et $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Donc $f_n(0) \times f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ (car $-n < 0$) et d'après le Théorème des valeurs intermédiaires ;l'équation

$f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

c- Vérifions que : $\sin(\alpha_n) = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$.

on a : $f_n(\alpha_n) = 0$

donc : $\alpha_n - n + n\sin(\alpha_n) = 0$

d'où : $\sin(\alpha_n) = \frac{n - \alpha_n}{n} = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$

1) a- Soit $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x - (n+1) + (n+1)\sin x) - (x - n + n\sin x)$

$= -1 + \sin x$

et comme $\sin x \le 1$ alors $-1 + \sin x \le 0$

d'où : $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$

b- on a : $\left(\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$: $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$

et comme α_n et α_{n+1} sont deux éléments de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,alors : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \le f_n(\alpha_{n+1})$

or $f_{n+1}(\alpha_{n+1})=f_n(\alpha_n)=0$; alors : $f_n(\alpha_n)\le f_n(\alpha_{n+1})$

f_n est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;donc : $\alpha_n\le\alpha_{n+1}$

D'où la suite (α_n) est croissante.

c- On a la suite (α_n) est croissante et majorée par $\frac{\pi}{2}$,d'où elle est convergente.

d- ■ Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\alpha_n)$

On a (α_n) est convergente, posons $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$; $0\le\alpha_n\le\frac{\pi}{2}$, d'où $0\le l\le\frac{\pi}{2}$

Et on a : $\sin(\alpha_n)=1-\frac{\alpha_n}{n}$; et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{n}=0$ (car $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$) ; donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\alpha_n)=1$

■ Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=l$ et la fonction $x\mapsto\sin x$ est continue sur IR, en particulier en l donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\alpha_n)=\sin(l)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\alpha_n)=1$; d'où $\sin(l)$ et comme $0\le l\le\frac{\pi}{2}$ alors $l=\frac{\pi}{2}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\frac{\pi}{2}$

EXERCICE11

1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,l'équation $\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{\pi}{2nx}$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]0,1[$

2) Montrer que la suite $(x_n)_{n\ge1}$ est convergente

3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}x_n$.

CORRECTION

1/ On pose $g_n(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{\pi}{2nx}$

$u:x\mapsto\frac{\pi}{2}x$ est continue sur $]0,1[$ et $u(]0,1[)\subset\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $x\mapsto\tan x$ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

donc $x\mapsto\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ est continue

sur $]0,1[$ $x\mapsto\frac{\pi}{2nx}$ est continue sur $]0,1[$

alors g_n est continue sur $]0,1[$ et

$\forall x\in]0,1[\ g_n'(x)=\frac{\pi}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)+\frac{\pi}{2nx^2}>0$

Donc g_n est strictement croissante sur $]0,1[$

D'où g_n est bijective de $]0,1[$ vers $g_n(]0,1[)=\mathbb{R}$ et $0\in\mathbb{R}$ donc l'équation $g_n(x)=0$ c'est-à-dire $\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{\pi}{2nx}$ admet une unique solution x_n dans $]0,1[$

2/ Soit $x \in]0,1[$ $: g_{n+1}(x) - g_n(x) = \frac{\pi}{2x}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) > 0$

Donc : $g_{n+1}(x) > g_n(x)$

x_n et x_{n+1} dans $]0,1[$

Donc : $g_{n+1}(x_{n+1}) > g_n(x_{n+1})$

Et : $g_n(x_n) > g_n(x_{n+1})$

Car : $g_n(x_n) = g_{n+1}\ (x_{n+1}) = 0$ et on a : g_n continue strictement croissante sur $]0,1[$ donc $x_n > x_{n+1}$ d'où la suite (x_n) est décroissante ; et elle est minorée par 0 ; alors (x_n) est convergente.

3/ On pose $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ alors $l \in [0,1]$ et on a : $\tan\left(\frac{\pi}{2}x_n\right) = \frac{\pi}{2nx_n}$

On a : x_n est décroissante donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) x_n \le x_1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \le x_1$ d'où $l \le x_1 < 1$ donc $l \ne 1$

On a : $x_n \tan\left(\frac{\pi}{2}x_n\right) = \frac{\pi}{2n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \tan\left(\frac{\pi}{2}x_n\right) = 0$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l \in [0;1[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}x_n\right) = \frac{\pi}{2}l$ et $\frac{\pi}{2}l \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $x \mapsto \tan x$ est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et en particulier en $\left(\frac{\pi}{2}l\right)$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2}x_n\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}l\right)$

Or : $l \times \tan\left(\frac{\pi}{2}l\right) = 0$

Donc : $l = 0$ ou $\tan\left(\frac{\pi}{2}l\right) = 0$

Alors : $l = 0$ ou $\frac{\pi}{2}l = 0$ car $\left(\frac{\pi}{2}l\right) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

D'où $l = 0$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n = 0$

· Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}x_n$

On a : $\tan\left(\frac{\pi}{2}x_n\right) = \frac{\pi}{2nx_n}$

Donc : $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x_n\right)}{\frac{\pi}{2}x_n} \times \frac{\pi}{2}x_n = \frac{\pi}{2nx_n}$

D'où : $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x_n\right)}{\frac{\pi}{2}x_n} = \dfrac{1}{n \bullet x_n^2}$

Alors : $n \bullet x_n^2 = \dfrac{1}{\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x_n\right)}{\frac{\pi}{2}x_n}}$ (car $x_n > 0$)

D'où : $\sqrt{n}\bullet x_n = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x_n\right)}{\frac{\pi}{2}x_n}}}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\bullet x_n = 1$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}x_n\right)=0$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x_n\right)}{\frac{\pi}{2}x_n}\right)=1$$

EXERCICE 12

1/ Soit n un entier naturel non nul.
Montrer que l'équation : $x^n + x^{n-1}+\ldots+x-1=0$ possède une unique solution dans $[0,+\infty[$.
On la note α_n .

2/ Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.

3/ Montrer que, pour tout entier naturel $n\geq 2$: $\alpha_n = \dfrac{1+\alpha_n^{\ n+1}}{2}$.

4/ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n^{\ n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.

CORRECTION

1/ Soit $n\in IN^*$. Posons $P_n(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x-1$

On a P_n est une fonction polynôme, donc elle est continue sur IR, et en particulier sur $[0;+\infty[$

P_n est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x\in[0;+\infty[$: $P_n'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\ldots+2x+1$

Alors : $P_n'(x)>0$ (car $x\geq 0$)

Donc P_n est strictement croissante sur $[0;+\infty[$; alors P_n est bijective de $[0;+\infty[$ vers $P_n([0;+\infty[)=[-1;+\infty[$, et comme $0\in[-1;+\infty[$, alors l'équation $P_n(x)=0$ admet une unique solution α_n dans $[0;+\infty[$.

2/ Montrons que (α_n) est décroissante.

Soit $x\in[0;+\infty[$ on a : $P_{n+1}(x)-P_n(x)=x^{n+1}$ et $x^{n+1}\geq 0$; donc $P_{n+1}(x)\geq P_n(x)$ et comme $\alpha_{n+1}\in[0;+\infty[$ alors $P_{n+1}(\alpha_{n+1})\geq P_n(\alpha_{n+1})$;or $P_{n+1}(\alpha_{n+1})=P_n(\alpha_n)=0$; alors : $P_n(\alpha_n)\geq P_n(\alpha_{n+1})$

P_n est une fonction continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$;donc $\alpha_n\geq\alpha_{n+1}$; d'où (α_n) est décroissante.

On a (α_n) est décroissante et minorée par 0 (car $\alpha_n\geq 0$), alors (α_n) est convergente .

3/ Montrons que $(\forall n\geq 2)$: $\alpha_n=\dfrac{1+\alpha_n^{\ n+1}}{2}$

On a : $P_n(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x-1$

Alors $P_n(x)=\left(x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1\right)-2$

$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 2$$

et $P_n(1) = n-1$; $n-1 \geq 1$ (car $n \geq 2$) ; donc : $P_n(1) \neq 0$ et on a $P_n(\alpha_n) = 0$; et comme α_n est unique dans $[0;+\infty[$ et $1 \in [0;+\infty[$ alors $\alpha_n \neq 1$, d'où : $P_n(\alpha_n) = \frac{1-\alpha_n^{\ n+1}}{1-\alpha_n} - 2$

$P_n(\alpha_n) = 0$; d'où : $\frac{1-\alpha_n^{\ n+1}}{1-\alpha_n} = 2$

Alors : $1-\alpha_n^{\ n+1} = 2-2\alpha_n$;d'où : $2\alpha_n = 1+\alpha_n^{\ n+1}$, et $\alpha_n = \frac{1+\alpha_n^{\ n+1}}{2}$

4/ Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{\ n+1}$

Pour tout $n \geq 2$, on a : $P_n(1) = n-1$ et $n-1 > 0$ donc : $P_n(1) > 0$ et $P_n(0) = -1$ alors $P_n(0) \times P_n(1) < 0$ et on a : $P_n(\alpha_n) = 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $0 < \alpha_n < 1$ et comme (α_n) est décroissante , alors : Pour tout $n \geq 2$ $0 < \alpha_n \leq \alpha_2 < 1$;alors : $(\forall n \geq 2)$ $0 < \alpha_n^{\ n+1} \leq \alpha_2^{\ n+1}$;on a : $0 < \alpha_2 < 1$,donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_2^{\ n+1} = 0$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{\ n+1} = 0$.

Déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

On a : $(\forall n \geq 2)$: $\alpha_n = \frac{1+\alpha_n^{\ n+1}}{2}$

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{\ n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\alpha_n^{\ n+1}}{2} = \frac{1}{2}$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.

EXERCICE16

On considère la fonction $f : x \to \sqrt{\frac{2}{1+\sin x}}$

1) a-Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$: $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sqrt{2}\,(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}}$

b- Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$: $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

3) Soit (u_n) la suite numérique définie

Par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a-Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}$

b-Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|u_n - \alpha|$

c-En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

CORRECTION

1/ a- f est dérivable : $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $f'(x)=\dfrac{-2\cos x}{2\left(\sqrt{\dfrac{2}{1+\sin x}}\right)(1+\sin x)^2}$

$$=\frac{-\cos x}{\sqrt{2}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}}$$

b- Soit $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$,on a : $f'(x)=\dfrac{-\cos x}{\sqrt{2}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}}$

Donc : $|f'(x)|=\dfrac{\cos x}{\sqrt{2}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}}$

Et on a : $0\leq \cos x \leq 1$ et $0 \leq \sin x \leq 1$

Alors c : $\dfrac{\cos x}{\sqrt{2}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Et $\sqrt{2}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}} \geq \sqrt{2}$ donc : $0<\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $|f'(x)| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2/ Soit $g(x)=f(x)-x$

$x \mapsto 1+\sin x$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et strictement positive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $x \mapsto \sqrt{\dfrac{2}{1+\sin x}}$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $x \mapsto -x$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc

D'où g est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ alors g est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$g'(x)=f'(x)-1$ et $|f'(x)| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$

Alors : $-1 < f'(x) < 1$ donc : $g'(x)<0$

on conclut que g est strictement décroissante, alors g est bijective de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ vers

$\left[1-\frac{\pi}{2};\sqrt{2}\right]$ et $0 \in \left[1-\frac{\pi}{2};\sqrt{2}\right]$ donc l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

3/ a- Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\, 0 \leq U_n \leq \dfrac{\pi}{2}$

- <u>Pour n=0</u> : on a : $U_0=0$

  Donc : $0 \leq U_0 \leq \dfrac{\pi}{2}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$

  Supposons que $0 \leq U_n \leq \dfrac{\pi}{2}$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq \dfrac{\pi}{2}$

On a : $0 \le U_n \le \frac{\pi}{2}$ f est strictement décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \le f(U_n) \le f(0)$ d'où $0 \le 1 \le U_{n+1} \le \sqrt{2} \le \frac{\pi}{2}$

Alors : $0 \le U_{n+1} \le \frac{\pi}{2}$

Conclusion :

On a montré par récurrence que :

$(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \le U_n \le \frac{\pi}{2}$

b- On a f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right) |f'(x)| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

d'après l'inégalité des accroissements finis

$\forall (x,y) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]^2 \; |f(x) - f(y)| \le \frac{\sqrt{2}}{2}|x-y|$ et $(U_n;\alpha) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]^2$ donc :$|f(U_n) - f(\alpha)| \le \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \alpha|$

Donc : $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \alpha|$

c- Montrons par récurrence que

$(\forall n \in \mathbb{N}) |U_n - \alpha| \le \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

- Pour n=0

On a : $|U_0 - \alpha| \le \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 |U_0 - \alpha|$

Donc la proposition est vraie pour n=0

- Soit n∈ℕ

Supposons que : $|U_n - \alpha| \le \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$ et montrons que : $|U_{n+1} - \alpha| \le \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$

On a : $|U_n - \alpha| \le \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \qquad (1)$

Et d'après la question 3/ b- on a $|U_{n+1} - \alpha| \le \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) |U_n - \alpha| \qquad (2)$

de (1) et (2) on déduit que : $|U_{n+1} - \alpha| \le \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \times \frac{\sqrt{2}}{2} |U_0 - \alpha|$

Donc $|U_{n+1} - \alpha| \le \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$

Conclusion :

On a montré par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) |U_n - \alpha| \le \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

On a $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ (car $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$) donc d'après les critères de convergence, (U_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha$