Examen Nat Sc Eco 2017 Session normale
Sujet de maths

Exercice 1 *(4,5 pts)*

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in IN}$ *définie par :* $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{2}{5} \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$

1- a) *Calculer* U_1 *et* U_2

b) *Montrer par récurrence que :* $(\forall n \in IN)$; $U_n > \frac{1}{2}$.

c) *Montrer que :* $(\forall n \in IN)$ $U_{n+1} - U_n = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} - U_n\right)$

d) *Déduire que la suite* (U_n) *est décroissante et qu'elle est convergente*

2- *On pose :* $V_n = U_n - \frac{1}{2}$ *; pour tout* $n \in IN$.

a) *Montrer que* $(U_n)_{n\in IN}$ *est une suite géométrique en déterminant sa raison.*

b) *Calculer son premier terme* V_0 *;*

c) *Calculer* V_n *en fonction de n ; puis montrer que:* $U_n = \frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1\right)$ *; pour tout* $n \in \mathbb{N}$. .

d) *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3- *On pose pour tout* $n \in IN$: $S_n = U_0 + U_1 + U_1 + ... + U_{n-1}$.

Montrer que : $S_n = \frac{55}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{n}{2}$ *; pour tout .*

Exercice 2 : *(4 pts) (Donner tous les résultats sous forme de fractions)*

Un Sac contient neuf boules (indiscernables au toucher) qui portent successivement les nombres : 0 ;0 ;1 ;1 ;1 ;1 ;2 ;2 ;2.
On tire de façon aléatoire simultanément deux boules du Sac .

1- a) *Monter que le nombre de cas possibles est* 36 .

b) *Calculer* $P(B)$ *et* $P(C)$.

2- *Soit X la variable aléatoire liée à la somme des nombres que portes les boules tirées.*

a) *Montrer que :* $P(X = 2) = \frac{12}{36}$.

b) *Recopier puis compléter le tableau ci-dessous en justifiant vos réponses :*

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$			$\frac{12}{36}$		

b) *Calculer l'espérance mathématique* E(X) *de la variable aléatoire X.*

WWW.GUESSMATHS.CO

Exercice 3 : (8,5 pts)

Partie I

Soit la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $g(x)=2-\frac{2}{x}+\ln x$

1- Calculer $g'(x)$ *; puis déduire que g est croissante sur* $]0;+\infty[$.

2- a) Calculer $g(1)$ *; puis dresser le tableau de variation de g (le calcul des limites de g n'est pas demandé).*

b) Déduire le signe de $g(x)$ *sur chacun des intervalles* $]0;1]$ *et* $[1;+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=x-1+(x-2)\ln x$

1- Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

2- Montrer que : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

3- a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$ *:* $f'(x)=g(x)$.

b) Calculer $f(1)$ *;* $f(2)$ *et* $f\left(\frac{1}{e}\right)$ *puis dresser le tableau de variation de f sur* $]0;+\infty[$.

c) En utilisant le tableau de variation de f déterminer l'image de l'intervalle $\left[\frac{1}{e};2\right]$ *par f.*

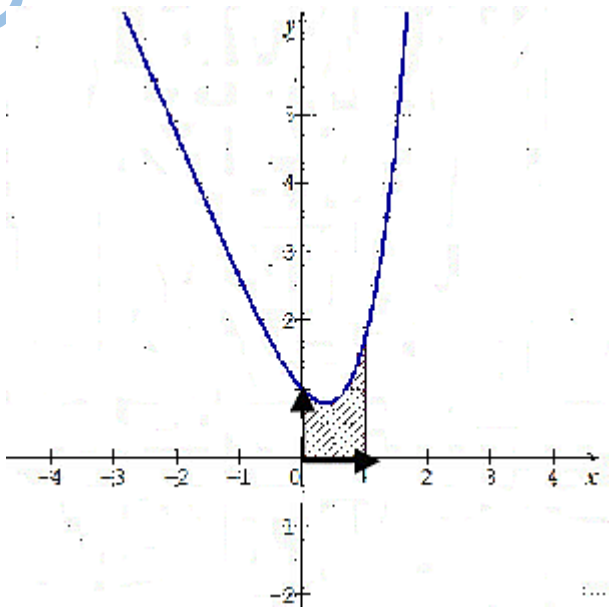
Exercice 4 : (3 pts)

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère la fonction numérique h définie sur IR par : $h(x)=xe^x-2x+1$

1- En utilisant une intégration par parties montrer que : $\int_0^1 xe^x dx=1$.

2- Sur la figure ci-dessous (C_h) *est la courbe représentative de la fonction h dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *; Calculer l'aire de la partie hachurée.*



WWW.GUESSMATHS.CO