

Exercice 1 :

Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + 3u_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
- 3) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est non nul.

On pose : $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$

- a) Calculer les trois premiers termes de la suite (v_n) .
- b) Déterminer la nature de (v_n) .
- c) Exprimer v_n en fonction de n .

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

- 1) a) Calculer U_1 et U_2
- b) La suite (U_n) est-elle arithmétique ? est-elle géométrique ?

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n - 3$.

- a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$; puis calculer V_0 .
- b) Exprimer V_n en fonction de n ; puis U_n en fonction de n .
- c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$; puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

- 3) a) Calculer $S_1 = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$, puis en déduire $S_2 = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$.
- b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_2$

Exercice 7:

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

- 1/ a) Calculer U_1 ; U_2 et U_3 .
- b) Montrer que la suite (U_n) ni arithmétique ni géométrique.
- 2/ Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n + 1$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- a) Calculer V_0
- b) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.
- c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3/ a) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$

b) En déduire $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$.

Exercice 8:

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) Justifier alors que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n + 3$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $V_0 = 1$.

b) Calculer V_n en fonction de n puis déduire que $U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$.

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3) On pose : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ et $S'_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$

a) Exprimer S'_n en fonction de n puis déduire que $S_n = -3n - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$