

Exercice 26

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1- a. Déterminer les limites de f aux bornes des intervalles de $\mathbb{R}^*$
 b. Étudier les branches infinies de la courbe (C) .
- 2- a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
 b. Dresser le tableau de variations de f .
 c. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
- 3 - a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+2)}{x^3} e^x$$
 b. Étudier la concavité de (C) .
 c. Tracer la courbe (C) .

Solution

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x$$

1) a. ■ Calculons : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \frac{e^x}{x} = 0 \end{aligned}$$

(Car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$)

donc: $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}$

■ Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\text{On a: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x = -\infty \text{ (Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty)$$

donc: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty}$

■ Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$$\text{On a: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x = +\infty \text{ (Car } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty)$$

donc: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty}$

■ Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x = +\infty$ (Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$)

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b. Etudions les branches infinies de (C) .

On a : ■ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc la courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation : $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.

■ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ donc la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation : $x = 0$ au voisinage de $+\infty$:

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{e^x}{x} = +\infty$ (Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$)

donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

2) a. Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in \mathbb{R}^*, \text{ on a : } f'(x) &= \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x \right)' \\ &= \frac{1}{x^2} e^x + \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x \\ &= \left(\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{1}{x} \right) e^x \\ &= \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2} \right) e^x \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f'(x) = \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2} \right) e^x$$

b. Tableau de variations de f :

On a pour tous $x \in \mathbb{R}$: $x^2 - x + 1 > 0$ car le discriminant de l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ est négatif.

Donc : $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$

c. Equation de la tangente (T)

On a : $f(1) = 0$ et $f'(1) = e$ donc une l'équation de (T) est $y = e(x - 1)$

3) a. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a: $f''(x) = \left(\left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2} \right) e^x \right)'$

$$= \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2} \right)' e^x + \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2} \right) e^x$$

$$\text{Et } \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2} \right)' = \frac{(2x - 1) \times x^2 - (x^2 - x + 1) \times 2x}{x^4}$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} - x^2 - \cancel{2x^3} + 2x^2 - 2x}{x^4}$$

$$= \frac{x - 2}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{x - 2}{x^3} e^x + \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2} \right) e^x$$

$$= \left(\frac{x - 2}{x^3} + \frac{x^2 - x + 1}{x^2} \right) e^x$$

$$= \left(\frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^3} \right) e^x$$

$$= \left(\frac{x^2(x - 1) + 2(x - 1)}{x^3} \right) e^x$$

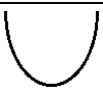
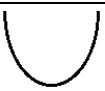
$$= \frac{(x^2 + 2)(x - 1)}{x^3} e^x$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f''(x) = \frac{(x^2 + 2)(x - 1)}{x^3} e^x$

b. Etudions la concavité de (C)

On remarque le signe de $f''(x)$ est celui de $\frac{(x - 1)}{x}$

Le tableau suivant résume la concavité de (C):

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	+		-	+
concavité de (C)				

Le point $A(1;0)$ est un point d'inflexion de (C)

4) La courbe de la fonction

