

**EXERCICE 1**

Soit la fonction définie par :  $f(x) = 2x\sqrt{\frac{x}{x-2}} - x$

1. Déterminer le domaine de définition  $D$  de la fonction

2. Déterminer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$

**EXERCICE 2**

Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $x_0$  dans chacune des cas suivants :

$$1) f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}} \quad \text{en } x_0 = -2$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}-1}{x} \quad \text{en } x_0 = 0$$

$$3) f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1} \quad \text{en } x_0 = 2$$

$$4) f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \quad \text{en } x_0 = 1$$

$$5) f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1} \quad \text{en } x_0 = 1$$

$$6) f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x} \quad \text{en } x_0 = 0 \text{ et } \text{en } x_0 = 1$$

**EXERCICE 3**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  respectivement définies sur  $\mathbb{R}^*$  et  $\mathbb{R} - \{-1\}$  par :  $f(x) = \frac{x+1}{x}$

$$\text{et } g(x) = \frac{x}{x+1}$$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  et en déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x).$$

2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x)$  et

en déduire  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g \circ f(x)$

3. Calculer  $g \circ f(x)$  et retrouver  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x)$

et  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} g \circ f(x)$ .

**EXERCICE 4**

Montrez que les limites suivantes existent et calculez leur valeur

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{4x^2 + 3x + 2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$$

**EXERCICE 5**

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{4-x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{2x+1}{3x^2-x+1}\right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{1-x^2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + \sin x}{x^2 + 3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(3x)}{x^2}$$

**EXERCICE 6**

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2(x) - 1}{1 + \cos x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x||x-2|}{x(x^2-x-2)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sin(\pi x)}{x-1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2(x)}$$

### EXERCICE 7

Déterminer, à l'aide des théorèmes de comparaison les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de chacune des fonctions suivantes (si elles existent)

1)  $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}}$

2)  $f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$

### EXERCICE 8

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = 2x - \sin x$

1) Montrer que pour tout  $x$  réel :

$$2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$$

2) En déduire les limites de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ .

### EXERCICE 9

Soit la fonction  $f$  définie sur  $D = [0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$$

1) Démontrer que, pour tout  $x$  de  $D$ , on a :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

2) Démontrer que, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

3) En déduire la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$

### EXERCICE 10

On considère la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - \sqrt{x} + 4$$

1) Montrer que pour tout  $x \in [0; +\infty[$  ;

$$f(x) \geq 3\sqrt{x}$$

2) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

### EXERCICE 11

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x + 1}{x^2 + 1}$$

1) Montrer qu'il existe trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels

$$\text{que : } f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2 + 1}$$

2) Rechercher les asymptotes à la courbe représentative de la fonction  $f$ .

### EXERCICE 12

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Montrer que pour tout  $x \in [1; +\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}}$$

b. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. a. Montrer que la droite  $(\Delta): y = \frac{x}{2} - 1$  est

une asymptote oblique à  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$ .

b. Montrer que pour tout  $x$  de  $x \in [1; +\infty[$  ;

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} < 1$$

c. En déduisez la position relative de  $(C)$  et  $(\Delta)$

### EXERCICE 13

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Etudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

La courbe  $(C)$  admet-elle des asymptotes horizontales?

2. Démontrer que la droite  $A$  équation

$y = -2x - \frac{1}{2}$  est une asymptote oblique à  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$ .

### EXERCICE 14

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{x + \sin x}{2 - \sin x}$$

1. Montrer que  $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \sin x} \leq 1$ .

2. En déduire un encadrement de  $f(x)$  pour  $x > 1$

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

### **EXERCICE 15**

Déterminer si elles existent les asymptotes verticales ou horizontales à la courbe de chacune des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = \frac{3x-1}{x}$

2)  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

3)  $f(x) = \frac{1}{x+2}$

2)  $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

5)  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$

### **EXERCICE 16**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-2\}$  par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2}$$

1) Déterminer trois nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels

que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$  pour tout

$(x \in \mathbb{R} - \{-2\})$ .

2) Etudier le comportement de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  ; à droite et à gauche en  $-2$ .

(Limite, asymptote à la courbe)

### **EXERCICE 17**

Montrer que la droite d'équation  $y = x$  est asymptote

en  $+\infty$  à la courbe représentative de la fonction  $f$

définie par :  $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

### **EXERCICE 18**

Montrer que la droite d'équation  $y = 2x$  est asymptote au voisinage de  $+\infty$  à la courbe représentative de la fonction définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$