Série d'exercices sur la dérivabilité ***2éme Bac SM***

Exercice 1

Soit f une fonction continue et deux fois dérivable sur l'intervalle $[a;b]$.

On suppose que : $f(a)=f(b)=0$

On considère la fonction φ définie sur $[a;b]$ par : $\forall t\in[a;b]$;

$\varphi(t)=f(t)-\dfrac{(t-a)(t-b)}{2}\times\dfrac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$, ou $x\in]a;b[$.

1) Calculer $\varphi(a)$; $\varphi(b)$ et $\varphi(x)$

2) Montrer que φ est deux fois dérivables sur $[a;b]$

3) Déduire que

a) $\exists e\in]a;x[$; $\varphi'(e)=0$

b) $\exists d\in]x;b[$; $\varphi'(d)=0$

4) Déduire que : $\exists c\in]a;b[$; $f(x)=\dfrac{(x-a)(x-b)}{2}\times f''(c)$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $[0;1]$ et dérivable sur $[0;1]$ telle que : $f(0)=0$ et $\forall x\in[0;1]$; $f'(x)\neq 0$.

Montrer que f garde le même signe sur d'intervalle $[0;1]$.

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-1;1]$ par : $\begin{cases} g(x)=f\left(\tan\dfrac{\pi x}{2}\right) & si\ x\in]-1;1[\\ g(-1)=g(1)=1 \end{cases}$

1) Montrer que g est continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$

2) Montrer que : $\exists\alpha\in]-1;1[\ /\ g'(\alpha)=0$ que : FER / f'(c)=0.

3) Déduire $\exists c\in\mathbb{R}\ /\ f'(c)=0$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-\cos x$

1) Montrer que : $\exists x_0\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right]\ /\ f(x_0)=0$.

a) Montrer que : $\exists c\in\left]x_0;\dfrac{\pi}{4}\right[\ /\ \dfrac{\pi-2\sqrt{2}}{\pi-4x_0}=f'(c)$

WWW.GUESSMATHS.CO

Exercice 5

On considère le fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ *par :* $f(x)=2\sin x+\tan x-3x$

1) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$; $f'(x)>0$.

2) Déduire que : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$; $3x<2\sin x+\tan x$.

Exercice 6

On considère le fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=4x(\pi-x)-\pi^3\sin^2 x$

1) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *et que :* $\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$; $f''(x)=-2\left(4+\pi^3\cos 2x\right)$

2) Montrer que : $\exists!\beta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\ /\ f'(\beta)=0$.

3) Déduire que : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$; $\sin^2 x\le\frac{4}{\pi^2}x(\pi-x)$.

WWW.GUESSMATHS.CO