CORRECTION

EXERCICE 1 :

1) a- pour tout $(x;y)$ de IR^2 , on a :

$$\begin{aligned}(x+yi)*(a+bi)&=xa+(x^2b+a^2y)i\\&=ax+(a^2y+x^2b)i\\&=(a+bi)*(x+yi)\end{aligned}$$

Donc $*$ est une loi commutative dans $\mathbb{C}$.

b- ■ pour tout $(x;y)$;$(a;b)$ et $(c;d)$ de IR^2 ,on a :

$$\begin{aligned}&\left[(x+yi)*(a+bi)\right]*(c+di)\\&=(xa+(x^2b+a^2y)i)*(c+di)\\&=\left((xa)c+\left((xa)^2d+c^2(x^2b+a^2y)\right)i\right)\\&=x(ac)+\left(x^2(a^2d+c^2b)+(ca)^2y\right)i\\&=(x+yi)*(ac+(a^2d+c^2b)i)\\&=(x+yi)*\left[(a+bi)*(c+di)\right]\end{aligned}$$

Donc $*$ est une loi associative dans $\mathbb{C}$; alors :

c) $1\in\mathbb{C}$ et pour tout $(x;y)$ de IR^2 On a :

$$(x+yi)*1=1*(x+yi)=(x+yi)$$

Donc 1 est l'élément neutre pour $(\mathbb{C};*)$

d) Soit $(x;y)\in IR^*\times IR$, on a :

$$(x+yi)*\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i\right)=\cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}}+\left(x^2\times\left(-\frac{y}{x^4}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)^2y\right)i$$

$$=1+\left(-\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x^2}\right)i=1$$

Donc $(x+yi)*\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i\right)=1$

Et comme la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{C}$ alors :

$$(x+yi)*\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i\right)=\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i\right)*(x+yi)=1$$

Et $\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i\right)\in\mathbb{C}$ alors $\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i\right)$ est le symétrique de $(x+yi)$ dans $(\mathbb{C};*)$.

2) $E=\{x+yi\ /\ x>0\ \text{ et }\ y\in IR\}$

a) $E\subset\mathbb{C}$

Pour tout $x+yi$ et $a+bi$ de E

$(x>0\ ;\ a>0$ et $(y;b)\in IR^2)$; on a :

$$(x+yi)*(a+bi)=xa+(x^2b+a^2y)i$$

$x>0$ et $a>0$ donc $xa>0$ et $(x^2b+a^2y)\in IR$

D'où $(x+yi)*(a+bi)\in E$ et par suite E est une partie stable de $(\mathbb{C};*)$.

b) On a E est une partie stable de $(\mathbb{C};*)$ et la loi $*$ est commutative et associative dans $\mathbb{C}$ alors la loi $*$ est commutative et associative dans E ;1 est l'élément neutre de $(\mathbb{C};*)$ et $1\in E$ donc 1 est l'élément neutre de $(E;*)$.

Soit $x+yi\in E$ alors $x>0$; $y\in IR$ et d'après la question (1)d-) ; $x+yi$ admet pour symétrique le nombre $\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i\right)$ et comme $\frac{1}{x}>0$ et $-\frac{y}{x^4}\in IR$ (Car $x\neq 0$ et $x>0$) ; alors $\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i\right)\in E$,donc tout élément de E est symétrisable dans E pour la loi $*$.

D'où $(E;*)$ est un groupe commutatif.

3) $G=\{1+yi\ /\ y\in IR\}$

On a : $G\subset E$ (Car $1>0$) et $1\in G$ (Car $1=1+0\times i$)

D'où $G\neq\varnothing$

Soit $(1+yi;1+bi)\in G^2$;$1+bi\in E$ et le symétrique de $1+bi$ dans $(E;*)$ est $1-bi$, et on a :

$$\begin{aligned}(1+yi)*(1-bi)&=1\times1+(1^2\times(-b)+1^2\times y)i\\&=1+(y-b)i\end{aligned}$$

Et $1+(y-b)i\in G$; donc $(G;*)$ est un sous-groupe de $(E;*)$.

4) $F=\left\{M(x;y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}\ /\ x>0 \text{ et } y\in IR\right\}$

a) On a : $F\subset\mathcal{M}_2(IR)$

Soient $M(x;y)$ et $M(a;b)$ de F ($x>0$ et $a>0$

$$M(x;y)\times M(a;b)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xa&xb+ya\\0&xa\end{pmatrix}$$

Donc $M(x;y)\times M(a;b)=M(xa;xb+ya)\in G$

(Car $xa>0$)

Alors G est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$

b) Soit $x+yi$ et $a+bi$ de E ($x>0$ et $a>0$)

$$\varphi\left(\left(x+yi\right)*\left(a+bi\right)\right)=\varphi\left(xa+\left(x^2b+a^2y\right)i\right)$$
$$=M\left(x^2a^2;x^2b+a^2y\right)$$
$$=M\left(x^2;y\right)\times M\left(a^2;b\right)$$
$$=\varphi\left(x+yi\right)\times\varphi\left(a+bi\right)$$

Donc φ est un homomorphisme de $(E;*)$ vers $(F;\times)$.

■ *Soit $M(a;b)\in F$ $(a>0$ et $b\in IR$ $)$*

Cherchons un unique $x+yi\in E$ tel que :

$\varphi(x+yi)=M(a;b)$

On a : $\varphi(x+yi)=M(a;b)\Leftrightarrow M(x^2;y)=M(a;b)$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x^2 & y\\ 0 & x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x^2=a \text{ et } y=b$$
$$\Leftrightarrow x=\sqrt{a} \text{ et } y=b$$

(Car $a>0$)

$$\Leftrightarrow x+yi=\sqrt{a}+bi\in E$$

Donc φ est une bijection de E vers F, d'où φ est un isomorphisme de $(E;*)$ vers $(F;\times)$.

c) on a φ est un isomorphisme de $(E;*)$ vers $(F;\times)$ et $(E;*)$ est un groupe commutatif ; donc $(F;\times)$ est un groupe commutatif.

Exercices 2

1) a) Le discriminent de l'équation (E) est :

$$\Delta=(1+i)^2(1+m)^2-8im=2i(m-1)^2\neq 0$$

Car $m\in\mathbb{C}-IR$ et par suite $m\neq 1$ $(1\notin\mathbb{C}-IR$

b) $z_1=1+i$ et $z_2=(1+i)m$

2) $m=e^{i\theta}$ où $0<\theta<\pi$

a- $z_1+z_2=(1+i)+(1+i)m$

$$=(1+i)(1+m)$$
$$=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(1+e^{i\theta}\right)$$

Et : ■ $1+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=2e^{i\frac{\theta}{2}}\times\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Donc $z_1+z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times 2\times e^{i\frac{\theta}{2}}\times\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$=2\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

■ $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ *donc : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$; alors :*

$|z_1+z_2|=2\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *et*

$Arg\left(z_1+z_2\right)\equiv\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}[2\pi]$

b- Supposons que $z_1\times z_2\in IR$

On a $z_1\times z_2=2im\in IR$ donc $m\in iIR$

Donc $e^{i\theta}\in iIR$ alors $\theta=\frac{\pi}{2}$ (car $0<\theta<\pi$)

Et $z_1+z_2=(1+i)\left(1+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)=(1+i)^2=2i$

II- 1) a-Montrons que : $\omega=\frac{(1-i)(1-m)}{2}$

Ω est le milieu de $[CD]$, donc : $\omega=\frac{c+d}{2}$

Et on a : $d=be^{i\frac{\pi}{2}}=i(1+i)m$ *, donc :*

$$\omega=\frac{c+d}{2}=\frac{(1-i)+(i-1)m}{2}=\frac{(1-i)(1-m)}{2}$$

b- Calculons $\frac{b-a}{\omega}$ *:*

$$\frac{b-a}{\omega}=\frac{am-a}{(1-i)(1-m)}\times 2=\frac{-2a}{(1-i)}=\frac{-2(1+i)}{1-i}$$

donc , $\frac{b-a}{\omega}=\frac{-2(1+i)^2}{2}=-2i$

c- Montrons que : $AB=2O\Omega$ *et* $(AB)\perp(O\Omega)$

On a : $\frac{b-a}{\omega}=-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Donc : $\begin{cases}\left|\frac{b-a}{\omega}\right|=2\\ \arg\left(\frac{b-a}{\omega}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

d'où : $\begin{cases}AB=2O\Omega\\ \left(\overrightarrow{O\Omega};\overrightarrow{AB}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}AB=2O\Omega\\ (AB)\perp(O\Omega)\end{cases}$

2) a- ■ $(O\Omega)$ *coupe* (AB) *en H ,donc :* $H\in(AB)$

d'où A, B et H sont alignés .Alors $\frac{h-a}{b-a}\in IR$

■ $(AB)\perp(O\Omega)$ *et* $H\in(O\Omega)$*, donc :*

$(OH)\perp(AB)$ *; d'où :* $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OH}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$

Alors $\arg\left(\frac{h}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ *d'où* $\frac{h}{b-a} \in iIR$.

b- d'après la question 2) a- ;

On a $\frac{h-a}{b-a} \in IR$ *et* $\frac{h}{b-a} \in iIR$

Donc :
$$\begin{cases} \dfrac{\overline{h}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} = \dfrac{h-a}{b-a} & \langle 1 \rangle \\ \dfrac{\overline{h}}{\overline{b}-\overline{a}} = -\dfrac{h}{b-a} & \langle 2 \rangle \end{cases}$$

En faisant l'opération $\langle 1 \rangle$ - $\langle 2 \rangle$ *, on obtient :*

$$-\frac{\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} = \frac{2h}{b-a} - \frac{a}{b-a}$$

D'où : $$\frac{2h}{b-a} = \frac{a}{b-a} - \frac{\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$$

Donc : $$2h = a - \frac{\overline{a}(b-a)}{\overline{b}-\overline{a}}$$

Et on a : $b=(1+i)m = am$ *; donc :*

$$2h = a - \frac{\cancel{a}\times a(1-m)}{\cancel{\overline{a}}\left(1-\overline{m}\right)} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{(1-m)}{\left(1-\overline{m}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow h = \frac{a}{2}\left(\frac{\cancel{1}-\overline{m}-\cancel{1}+m}{1-\overline{m}}\right)$$

D'où : $$h = \frac{(1+i)}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}i\,Im(m)}{1-\overline{m}}\right) = \frac{(1-i)\,Im(m)}{\overline{m}-1}$$

Alors $$\boxed{h = \frac{(1-i)\,Im(m)}{\overline{m}-1}}$$

Exercice 3

1) a- On a : 2969 *est premier et* $2969 \nmid n$ *donc :*

$2969 \wedge n = 1$

Et d'après le théorème de Bézout : $\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2$

$/\ n\times u + 2969\times v = 1$ *d'où :*

$\exists u \in \mathbb{Z} / n\times u \equiv 1[2969]$.

b- On a : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

donc $u^8\times n^8 + u^8\times m^8 \equiv 0[2969]$ *et*

$n\times u \equiv 1[2969]$

d'où $u^8\times n^8 + u^8\times m^8 \equiv 0[2969]$ *et*

$(n\times u)^8 \equiv 1[2969]$

alors $(u\times m)^8 \equiv -1[2969]$

d'où $\left[(u\times m)^8\right]^{371} \equiv (-1)^{371}[2969]$

donc $(u\times m)^{2968} \equiv -1[2969]$

c- supposons que $2969 / u\times m$ *alors*

$u\times m \equiv 0[2969]$

d'où $(u\times m)^{2968} \equiv 0[2969]$ *et par suite*

$-1 \equiv 0[2969]$

Ce qui est absurde donc $2969 \nmid u\times m$.

d- On a : 2969 *est premier positif et* $2969 \nmid u\times m$

alors d'après le théorème de Fermat :

$(u\times m)^{2968} \equiv 1[2969]$.

2) a- Supposons que $2969 \nmid n$ *alors d'après ce qui précède :*

$(u\times m)^{2968} \equiv 1[2969]$ *et* $(u\times m)^{2968} \equiv -1[2969]$

Donc $1 \equiv -1[2969]$ *d'où* $2969/2$ *ce qui est absurde.*

Alors $2969/n$

b- Supposons que $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$ *et d'après ce qui précède* $2969/n$ *donc* $n \equiv 0[2969]$

alors : $n^8 \equiv 0[2969]$ *d'où :* $m^8 \equiv 0[2969]$.

Donc : $2969/m^8$.

Et comme 2969 *est premier, alors :* $2969/m$ *, d'où :*

$n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \Rightarrow n \equiv 0[2969]$ *et* $m \equiv 0[2969]$

Réciproquement*, supposons que :*

$n \equiv 0[2969]$ *et* $m \equiv 0[2969]$ *; Alors :*

$n^8 \equiv 0[2969]$ *et* $m^8 \equiv 0[2969]$ *d'où :*

$n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

Donc : $$n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 0[2969] \\ m \equiv 0[2969] \end{cases}.$$

Exercice 4

PARTIE I:

1) ■ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 4xe^{-x}\left(1 + \frac{1}{2}xe^{x} - e^{x}\right) = -\infty$$

(Car $\lim\limits_{x\to-\infty} 4xe^{-x} = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ *.)*

■ $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right) = +\infty$$

(Car $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x = +\infty$ *,* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ *et*

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x - 1 = +\infty$ *)*

2) a- On a : $x \mapsto 4x$ *;* $x \mapsto e^{-x}$ *et* $x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$

Sont dérivables sur IR ; donc f est dérivable sur IR, et pour tout $x \in IR$:

$$f'(x) = 4\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right) + 4x\left(-e^{-x} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 4\left(e^{-x} + x - 1 - xe^{-x}\right)$$

Donc : $f'(x) = 4\left(e^{-x} - 1\right)(1 - x)$

b- le signe de $f'(x)$ est celui de $\left(e^{-x} - 1\right)(1 - x)$

■ $e^{-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq 1 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$e^{-x}-1$		+	0	-		-	
$1-x$		+		+	0	-	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

c- On a f est dérivable sur IR ; et en particulier sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$, $f\left(\frac{3}{2}\right) \times f(2) < 0$ et f est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$ d'où d'après le T.V.I : $\exists! \alpha \in \left]\frac{3}{2};2\right[\;/\; f(\alpha) = 0$.

d- $f(\alpha) = 0$ donc $4\alpha\left(e^{-\alpha} + \frac{1}{2}\alpha - 1\right) = 0$

$\alpha \neq 0$ Donc : $e^{-\alpha} + \frac{1}{2}\alpha - 1 = 0$;

D'où : $\boxed{e^{-\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\alpha}$

3) a- On a : $(\forall x \in IR)\;\; f'(x) = 4\left(e^{-x} - 1\right)(1 - x)$

■ $x \mapsto e^{-x} - 1$ et $x \mapsto 1 - x$ sont continues et dérivables sur IR . D'où f' est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ et $f'(0) = f'(1) = 0$ et d'après le théorème de Rolle :

$\exists x_0 \in]0;1[\;/\; f''(x_0) = 0$.

b- f' est dérivable sur IR et pour tout $x \in IR$:

$f''(x) = 4e^{-x}\left(e^{x} + x - 2\right)$

Soit $x \in [0,1] - \{x_0\}$.

f'' est continue et dérivable sur IR alors f'' est continue sur un intervalle fermé de bornes x_0 et x et dérivable sur un intervalle ouvert J de bornes x_0 et x d'où d'après le T.A.F :

$(\exists c \in J) \;/\; f''(x) - f''(x_0) = (x - x_0) f^{(3)}(c)$

$f''(x_0) = 0$ et $x \neq x_0$, donc : $\dfrac{f''(x)}{x - x_0} = f^{(3)}(c)$

Et on a : $(\forall x \in IR)\; f^{(3)}(x) = 4e^{-x}(3 - x)$; donc : $(\forall x \in [0;1])$, $f^{(3)}(x) > 0$; Alors $f^{(3)}(c) > 0$ (Car $c \in J \subset [0;1]$).

D'où : $\dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0$

c- d'après la question précédente, on a : $\dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0$, donc $f''(x)$ et $x - x_0$ sont de même signe :

x	0		x_0		1
$f''(x)$		-	0	+	

D'où f'' s'annule en x_0 en changeant de signe Alors $I\left(x_0; f(x_0)\right)$ est un point d'inflexion de (C)

4) a- On a : ■ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} 4\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right)$$
$$= \lim_{x \to -\infty} 4x\left(\frac{1}{xe^{x}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

(Car $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0^{-}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{xe^{x}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = -\infty$.)

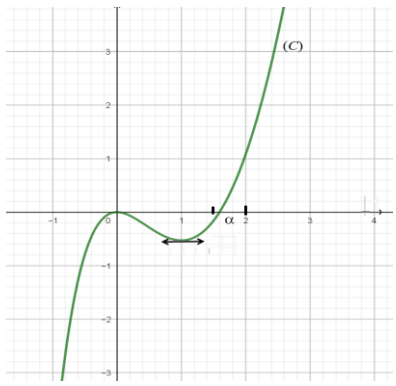
Donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

On a : ■ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 4\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right) = +\infty$$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

b- Construction de la courbe (C)



5) a- D'après le TV de f :

$$f\left(\left]-\infty;\alpha\right]\right)=f\left(\left]-\infty;0\right]\right)\cup f\left(\left[0;\alpha\right]\right)$$
$$=\left]-\infty;0\right]\cup\left[f(1);0\right]$$

Donc $f\left(\left]-\infty;\alpha\right]\right)=\left]-\infty;0\right]$ *d'où :*

$\left(\forall x\in\left]-\infty;\alpha\right]\right)$: $f(x)\leq 0$

2éme méthode :

D'après la courbe (C) , on a (C) est dessous de l'axe des abscisses sur $\left]-\infty;\alpha\right]$.

Donc : $\left(\forall x\in\left]-\infty;\alpha\right]\right)$; $f(x)\leq 0$

b- $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=4\int_0^{\alpha} xe^{-x}\,dx+\int_0^{\alpha}\left(2x^2-4x\right)dx$

■ *Par intégration par parties , on obtient :*

$$\int_0^{\alpha} xe^{-x}\,dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^{\alpha}-\int_0^{\alpha}\left(-e^{-x}\right)dx$$
$$=\left[-xe^{-x}\right]_0^{\alpha}+\int_0^{\alpha}e^{-x}\,dx$$
$$=-\alpha e^{-\alpha}-\left(e^{-\alpha}-1\right)$$
$$=-\alpha e^{-\alpha}-e^{-\alpha}+1$$

■ *En on a :*

$$\int_0^{\alpha}\left(2x^2-4x\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2\right]_0^{\alpha}=\frac{2}{3}\alpha^3-2\alpha^2$$

Donc :

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=-4\alpha e^{-\alpha}-4e^{-\alpha}+4+\frac{2}{3}\alpha^3-2\alpha^2$$

Et comme $e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}$*, alors :*

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=-4\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-4\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)+4+\frac{2}{3}\alpha^3-2\alpha^2$$
$$=-4\alpha+\cancel{2\alpha^2}-\cancel{4}+2\alpha+\cancel{4}+\frac{2}{3}\alpha^3-\cancel{2\alpha^2}$$
$$=\frac{2}{3}\alpha^3-2\alpha=\frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2-3\right)$$

Donc : $\boxed{\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2-3\right)}$

On a : $\frac{3}{2}<\alpha<2$ *et* $\left(\forall x\in\left[0;\alpha\right]\right)$ $f(x)\leq 0$ *et f est continue sur* $\left[0;\alpha\right]$ $(\alpha>0)$ *donc :*

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx\leq 0$$

D'où : $\alpha^2-3\leq 0$ *donc* $\alpha\leq\sqrt{3}$ *; et par suite :*

$\frac{3}{2}<\alpha\leq\sqrt{3}$.

c- L'aire demandé est : $S=\int_0^{\alpha}\left|f(x)\right|dx\ u.a$

Or $\left(\forall x\in\left[0;\alpha\right]\right)$ $f(x)\leq 0$ *; alors :*

$$S=-\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\frac{2}{3}\alpha\left(3-\alpha^2\right)u.a$$

PARTIE II :

$U_0<\alpha$ *et* $\left(\forall n\in IN\right)$ $U_{n+1}=f\left(U_n\right)+U_n$

1) a- Montrons par récurrence que :

$\left(\forall n\in IN\right)$ $U_n<\alpha$

Pour n=0, on a $U_0<\alpha$

Soit n∈IN

Supposons que : $U_n<\alpha$ *et montrons que :* $U_{n+1}<\alpha$.

On a : $U_n<\alpha$ *donc :* $f\left(U_n\right)\leq 0$ *d'après (5-a)*

Alors $f\left(U_n\right)+U_n<\alpha$ *; d'où ;* $U_{n+1}<\alpha$.

Conclusion

$\left(\forall n\in IN\right)$ $U_n<\alpha$

b- On a : $U_{n+1}-U_n=f\left(U_n\right)$ *et*

$\left(\forall n\in IN\right)$ $U_n<\alpha$

Donc $f\left(U_n\right)\leq 0$ *alors* $\left(\forall n\in IN\right)$ $U_{n+1}-U_n\leq 0$

D'où la suite $\left(U_n\right)$ *est décroissante.*

2) On suppose que $0\leq U_0$ *et on pose*

$$g(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$$

a- On a g est dérivable sur IR , et on a ;

$$\left(\forall x\in IR\right)\ g'(x)=-e^{-x}+\frac{1}{2}$$

$$-e^{-x}+\frac{1}{2}\geq 0\Leftrightarrow e^{-x}\leq\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow -x\leq ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x\geq ln(2)$$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		$\searrow$	$g(\ln 2)$	$\nearrow$	

Donc $\left(\forall x\in IR\right)$ $g(x)\geq g(\ln 2)$ *et*

$$g(\ln 2)=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$

On a $\ln 2>\frac{1}{2}$ *; donc* $g(\ln 2)>0$

D'où : $\left(\forall x\in IR\right)$ $g(x)>0$

b- On a : $f(x)+x=4xg(x)$ *donc :*

$$f\left(U_n\right)+U_n=4U_ng\left(U_n\right)$$

d'où $U_{n+1}=4U_n g(U_n)$

Pour n=0

On a $0\le U_0$

Soit $n\in IN$

Supposons que $0\le U_n$ et montrons que $0\le U_{n+1}$

D'après la question précédente, on :

$(\forall x\in IR)\ g(x)>0$

Donc $g(U_n)\ge 0$ et comme $0\le U_n$ alors

$0\le 4U_n g(U_n)$

Et par suite $0\le U_{n+1}$

Conclusion :

$(\forall n\in IN)\ 0\le U_n$.

c- On a (U_n) est décroissante et minorée par 0

Alors (U_n) est convergente.

d- Soit $\varphi(x)=f(x)+x$, alors $\varphi(U_n)=U_{n+1}$ et

(U_n) est décroissante donc : $U_n\le U_0<\alpha$; donc

$U_0\in[0,\alpha]$

φ est continue sur $[0,\alpha]$

Soit $x\in[0,\alpha]$, alors $f(x)\le 0$ (d'après (5-a))

Alors $f(x)+x\le\alpha$, d'où : $\varphi(x)\le\alpha$

D'autre part : $f(x)+x=4xg(x)$ soit

$\varphi(x)=4xg(x)$

Et comme $g(x)>0$ et $x\ge 0$, alors $xg(x)\ge 0$

D'où $\varphi(x)\ge 0$ par suite $0\le\varphi(x)\le\alpha$

Donc : $\varphi([0,\alpha])\subset[0,\alpha]$

et on a (U_n) est convergente. Alors la limite de (U_n) est solution de l'équation $\varphi(x)=x$.

On a : $\varphi(x)=x\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\alpha$

Et comme $U_n\le U_0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n\le U_0<\alpha$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$.

3) On suppose que $U_0<0$

a- Montrons que : $(\forall n\in IN)\quad U_{n+1}-U_n\le f(U_0)$

On a : $U_{n+1}-U_n=f(U_n)$ et $U_n\le U_0$

f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ donc :

$f(U_n)\le f(U_0)$ d'où : $U_{n+1}-U_n\le f(U_0)$

b- Montrons par récurrence que :

$(\forall n\in IN)\quad U_n\le U_0+n\,f(U_0)$

Pour n=0

On a $U_0\le U_0+0\times f(U_0)$ est vérifiée

Soit $n\in IN$

Supposons que $U_n\le U_0+n\,f(U_0)$ et montrons que :

$U_{n+1}\le U_0+(n+1)\,f(U_0)$

D'après la question 3) a-) on a :

$U_{n+1}\le U_n+f(U_0)$ et par hypothèse de récurrence $U_n\le U_0+n\,f(U_0)$ on obtient :

$U_{n+1}\le U_0+n\,f(U_0)+f(U_0)$

D'où : $U_{n+1}\le U_0+(n+1)\,f(U_0)$

Conclusion

$(\forall n\in IN)$: $U_n\le U_0+n\,f(U_0)$

c- On a $(\forall n\in IN)$ $U_n\le U_0+n\,f(U_0)$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty}n\,f(U_0)=-\infty$ (car $f(U_0)<0$) ; donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}f(U_0)+n\,f(U_0)=-\infty$

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=-\infty$.