Série 4 d'exercices limites et continuité

guessmaths

Exercice N° 1

Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-x-x^2}{1+x-2x^2}\ ;\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}{x-1}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2+3x}{1+x-x^2}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-3x+1\right)\ ;\ \lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{x^2-9}\ ;\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$$

Exercice N° 2

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la fonction f :

1) $f : x \mapsto \dfrac{\cos(\pi x+1)}{x}$ *en* $-\infty$.

2) $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{3}{x}\right)$ *en* $-\infty$.

3) $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ *en* 0^+ .

4) $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x^2-1)-1}{x^2-2x+1}$ *en* 1.

Exercice N° 3

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ *par :* $f(x)=\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\sin x$.

1) *Montrer que, pour tout réel positif x ;* $f(x)=\dfrac{2\sin x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

2) *Montrer que, pour tout réel positif x ;* $|f(x)|\le\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

3) *En déduire la limite de f en* $+\infty$.

Exercice N° 4

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{1}{2-\cos x}$.

1) *Montrer que, pour tout réel x ;* $\dfrac{1}{3}\le f(x)\le 1$

2) *En déduire les limites suivantes :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(2-\cos x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{(2-\cos x)}$ *et* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2(2-\cos x)}$.

Exercice N° 5

Soit la fonction $f : x \mapsto 3x+2\sin x$.

1) *a) Montrer que, pour tout réel x ;* $3x-2\le f(x)\le 3x+2$.

b) En déduire : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Soit la fonction g définie sur IR par : $\begin{cases} \dfrac{x}{f(x)} & si \;\; x\neq 0 \\ \dfrac{1}{5} & si \;\; x=0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue sue IR .

b) Montrer que, pour $x\in\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$; $\frac{x}{3x+2}\leq g(x)\leq\frac{x}{3x-2}$. En déduire : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

Exercice N° 6

Soit $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & si \;\; x\neq 0 \\ a & si \;\; x=0 \end{cases}$ où a est un réel .

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Pour quelles valeurs de a, f est continue en 0.
3) Préciser, suivant les valeurs de a, le domaine de continuité de f.
4) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty}\left(xf(x)+1-x\right)$ et $\lim_{x\to+\infty} xf(x)$.

Exercice N° 7

Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{x+3}{x^2+x-6}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que f est prolongeable par continuité en -3 et déterminer son prolongement.

Exercice N° 8

Soit la fonction $f:x\mapsto x^2-x+1$

1) Déterminer D_f.
2) Montrer que, pour tout réel x de D_f , $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$
3) Montrer que la droite D d'équation $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de f en +∞.
4) Etudier la position de la courbe de f et de la droite D.
5) Etudier la nature de la branche infinie de la courbe de f en -∞.

Exercice N° 9

On considère la fonction $f:x\mapsto\sqrt{x}-\frac{1}{x-1}$

1) Montrer que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $[0;1[$ et $]1;+\infty[$.

2) Déterminer $f([0,1[)$ et $f(]1;+\infty[)$.

3) Montrer que l'équation : $(x-1)\sqrt{x}=1$ admet dans $\left]\frac{3}{2};2\right[$ une unique solution α .

4) Déterminer une valeur approchée de α d'amplitude 10^{-1} .