

Exercice 1: (5 Pts) Thème: Nombres complexes

I. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 5 = 0$

- 1) Vérifier que: $z_1 = 1 - 2i$ est une solution de l'équation (E).
- 2) Déduira : z_2 la deuxième solution de l'équation (E).
- 3) Montrer que: $(z_1 + 1)^8 \in \mathbb{R}$.

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points A; B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 - 2i$; $z_B = 1 + 2i$ et $z_C = 3$.
Et soit h l'homothétie de centre $\Omega(\omega = 1 + i)$ et de rapport $k = 2$.

- 1) a) Ecrire le nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ sous forme trigonométrique.
b) En déduire la nature du triangle ABC.
- 2) Soit D l'image du point C par l'homothétie h.
Montrer que l'affixe du point D est $z_D = 5 - i$
- 3) Vérifier que: $\frac{z_D - \omega}{z_C - \omega} \in \mathbb{R}$ et interpréter ce résultat.
- 4) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tel que: $|\bar{z} - 1 + 2i| = 3$

Exercice 2: (4 Pts) Thème: Suites numériques

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{7}{4} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 7$.
- 2) Etudier la monotonie de la suite (u_n) . Que peut-on en déduire?
- 3) On considère la suite (v_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = u_n - 7$
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
 - b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 7 - 5\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
 - c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 4) Calculer en fonction de n la somme: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
- 5) Déterminer la plus petite valeur de entier naturel n pour laquelle : $|u_n - 7| \leq 10^{-3}$

Exercice 3: (11 Pts) Thème: Etude d'une fonction numérique

Partie 1:

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = e^x + 2/\ln x$.

- 1) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.
- 2) Etudier les variations de la fonction g sur $]0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
- 3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left] \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right[$.
- 4) Donner le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Partie 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\begin{cases} f(x) = e^x + 2x \ln(x) - 2x \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Montrer que : la fonction f est continue à droite en 0.
- 2) a) Calculer: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 3) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0; puis interpréter graphiquement le résultat.
- 4) a) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = g(x)$
b) Dresser le tableau de variation de la fonction f
- 5) Construire la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (On prend $\alpha \approx 0,4$).
- 6) Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]\alpha; +\infty[$
 - a) Montrer que h admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b) Calculer: $(h^{-1})'(e^{-2})$ (Remarquer que $h^{-1}(e^{-2}) = 1$).
 - c) Construire dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$; la courbe représentative de la fonction h^{-1} .
- 7) a) On pose: $K = \int_1^2 x \ln(x) dx$. A l'aide d'une intégration par parties démontrer que : $K = 2 \ln 2 - \frac{3}{2}$
b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.