Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\times\arctan x-\dfrac{\pi}{2}x\right)$
- $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{2\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)-\pi}{x-1}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}}{\sqrt[n]{x-\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}}\right)$ *où* $n\in\mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to a^3}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}-a}{x^2-a^6}\right)$

Correction :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Pour $x>0$ *; on a :* $\arctan x+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow \arctan x-\dfrac{\pi}{2}=-\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(-\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}-\left(\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$$

On pose $t=\dfrac{1}{x}$ *; alors* $x\to+\infty\Rightarrow t\to0$ *et* $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arctan t}{t}\right)=1$*(car* $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan t}{t}\right)=1$*)*

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}-\left(\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}-\left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)=-1$$

► $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\times\arctan x-\frac{\pi}{2}x\right)$

Pour $x>0$ *; on a :* $\sqrt{x^2+1}\times\arctan x-\frac{\pi}{2}x=\sqrt{x^2+1}\times\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\frac{\pi}{2}x$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-\sqrt{x^2+1}\times\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\times\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\times\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\times\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\times\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Et $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=0$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=1$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)=1$

Donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\times\arctan x-\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\times\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)=-1$

► $\lim_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)-\pi}{x-1}\right)$

Pour $x<1$ *; on a :* $2\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)-\pi=2\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan\left(\sqrt{1-x}\right)\right)-\pi$

$$=-\arctan\left(\sqrt{1-x}\right)$$

D'où $\lim_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)-\pi}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{-\arctan\left(\sqrt{1-x}\right)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\arctan\left(\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1-x}}\times\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$$

Et $\lim_{x\to 1^-}\left(\dfrac{\arctan\left(\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1-x}}\right)=1$*(on pose* $t=\sqrt{1-x}$ *) ;* $=\lim_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)=+\infty$

Donc $\lim_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)-\pi}{x-1}\right)=+\infty$

► $\lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}}{\sqrt[n]{x-\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}}\right)$ *où* $n\in\mathbb{N}^*$

Soit $n>1$ *et* $x>0$ *; on a :* $\dfrac{\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}}{\sqrt[n]{x-\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}}=\sqrt[n]{\dfrac{x+\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}{x-\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}}$

$$=\sqrt[n]{\frac{x-\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}+2\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}{x-\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}}$$

$$=\sqrt[n]{1+\frac{2\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}{x-\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}}$$

$$= \sqrt[n]{1+\frac{2\left(x+\sqrt[n]{x}\right)}{x\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}-\left(x+\sqrt[n]{x}\right)}}$$

$$= \sqrt[n]{1+\frac{2\left(x+\sqrt[n]{x}\right)}{x\left(\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}-1\right)-\sqrt[n]{x}}}$$

On pose $X=\sqrt[n]{x}$ *; alors* $x\to+\infty \Rightarrow X\to+\infty$ *; et :*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}}{\sqrt[n]{x-\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{2\left(x+\sqrt[n]{x}\right)}{x\left(\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}-1\right)-\sqrt[n]{x}}}$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{2\left(X^n+X\right)}{X^n\left(\sqrt[n]{X^n+X}-1\right)-X}}$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{2\left(1+\frac{1}{X^{n-1}}\right)}{\left(\sqrt[n]{X^n+X}-1\right)-\frac{1}{X^{n-1}}}}$$

Et $\lim_{X\to+\infty}\left(1+\frac{1}{X^{n-1}}\right)=1$; $\lim_{X\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[n]{X^n+X}-1\right)-\frac{1}{X^{n-1}}}=0$

Donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}}{\sqrt[n]{x-\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}}\right)=1$

► $\lim_{x\to a^3}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-a}{x^2-a^6}\right)$

Soit $a>0$ *et* $x\neq a$ *; on a :* $\frac{\sqrt[3]{x}-a}{x^2-a^6}=\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}^3}{x^2-\left(a^3\right)^2}$

$$=\frac{\left(x-a^3\right)}{\left(x-a^3\right)\left(x+a^3\right)\left(\sqrt[3]{x}^2+a\sqrt[3]{x}+a^2\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(x+a^3\right)\left(\sqrt[3]{x}^2+a\sqrt[3]{x}+a^2\right)}$$

Donc $\lim\limits_{x\to a^3}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}-a}{x^2-a^6}\right)=\lim\limits_{x\to a^3}\dfrac{1}{\left(x+a^3\right)\left(\sqrt[3]{x}^2+a\sqrt[3]{x}+a^2\right)}$

$$=\frac{1}{2a^3\left(a^2+a^2+a^2\right)}$$

$$=\frac{1}{6a^5}$$

Exercice 2 :

On considère la fonction définie par : $f(x)=-x+\sqrt{x-E(x)}$

1) *Déterminer* D_f *le domaine de définition de f.*

2) *Soit* $a\in\mathbb{Z}$ *; calculer* $\lim\limits_{x\to a}f(x)$

3) a- *Montrer que :* $\left(\forall x\in D_f\right)$ *;* $-x\leq f(x)\leq -x+1$

b- *En déduire* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Correction :

1) *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *; on a :* $x\geq E(x)\Leftrightarrow x-E(x)\geq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) *Soit* $a\in\mathbb{Z}$ *; on a :* $\lim\limits_{x\to a^+}E(x)=a\Rightarrow\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\left(-x+\sqrt{x-E(x)}\right)=-a$

Et $\lim\limits_{x\to a^-}E(x)=a-1\Rightarrow\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\left(-x+\sqrt{x-E(x)}\right)=-a+1$

3) a- *Soit* $x\in\mathbb{R}$ *; on a :* ► $\sqrt{x-E(x)}\geq 0\Leftrightarrow -x+\sqrt{x-E(x)}\geq -x$

$$\Leftrightarrow f(x)\geq -x$$

► $x-1\leq E(x)\Leftrightarrow x-E(x)\leq 1$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-E(x)}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow -x+\sqrt{x-E(x)}\leq 1-x$$

$$\Leftrightarrow f(x)\leq 1-x$$

D'où $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ *;* $-x\leq f(x)\leq 1-x$

b- *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *; on a :* $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$; $-x \leq f\left(x\right) \leq 1-x$

et $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(1-x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(-x\right) = +\infty$ *; donc* $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1-x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(-x\right) = -\infty$ *; donc* $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = -\infty$