ETUDE DES FONCTIONS ET INTEGRALES **2^{éme} Bac SM**

Exercice 1

Pour tout $x \geq 0$ on pose : $u(x) = e^{x} - e^{-x} + 1$ et $F(x) = \int_{1}^{u(x)} \sqrt{4+(t-1)^{2}}\,dt$

1) Etudier les variations de u sur $[0;+\infty[$

2) Montrer que F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que pour tout $x \in [0;+\infty[$:
$F'(x) = \left(e^{x} + e^{-x}\right)^{2}$

3) En déduire l'expression de $F(x)$ pour tout $x \in [0;+\infty[$ □.

4) Calculer A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de F et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = \frac{5}{2}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-1+e^{2x}}}$.

1. a. Montrer que f est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$.
   b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
   c. Tracer la courbe (Γ) de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

2. Soit h la fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^{2} x\right)$

   a. Montrer que h est une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0;+\infty[$

   b. Montrer que h^{-1} est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout $x \in]0;+\infty[$:
   $\left(h^{-1}\right)'(x) = f(x)$.

   c. Pour tout $\lambda \geq \ln(2)$ on désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations respectives $x = \ln(2)$; $x = \lambda$ et $y = 0$.
   Montrer que : $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \frac{\pi}{6}$

   d. Calculer le volume V du solide engendré par la rotation de la courbe (Γ) autour de l'axe des abscisses un tour complet sur $[\ln(2), 2\ln(2)]$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^{*}$; on pose ; $U_n = \int_{\ln\sqrt{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{e^{2nx}-1}}$

   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{*}$, $U_n \geq 0$
   b. Montrer que (U_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.
   c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{*}$; $U_n \leq \frac{1}{\sqrt{2^{n}-1}}$ en déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Correction de ''ETUDE DES FONCTIONS ET INTEGRALES''

Exercice 1

1) $u(x)=e^{x}-e^{-x}+1$

u est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x\in[0;+\infty[$: $u'(x)=e^{x}+e^{-x}>0$

Donc u est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2) $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $F(x)=\int_{1}^{u(x)}\sqrt{4+(t-1)^{2}}\,dt$.

La fonction $f:t\mapsto\sqrt{4+(t-1)^{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une primitive φ sur $\mathbb{R}$, et on a : $F(x)=\varphi(u(x))-\varphi(1)$

u est dérivable sur $[0;+\infty[$; $u([0;+\infty[)\subset\mathbb{R}$ et φ est dérivable sur $\mathbb{R}$; donc $x\mapsto(\varphi\circ u)(x)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$, par suite F est dérivable sur $[0;+\infty[$, et $(\forall x\in[0;+\infty[)$;

$F'(x)=u'(x)\varphi'(u(x))$

d'où : $(\forall x\in[0;+\infty[)$: $F'(x)=(e^{x}+e^{-x})f(u(x))$

$$\begin{aligned}
&=(e^{x}+e^{-x})(4+(u(x)-1)^{2})^{\frac{1}{2}}\\
&=(e^{x}+e^{-x})(4+(e^{x}-e^{-x})^{2})^{\frac{1}{2}}\\
&=(e^{x}+e^{-x})(4+e^{2x}-2+e^{-2x})^{\frac{1}{2}}\\
&=(e^{x}+e^{-x})(e^{2x}+e^{-2x}+2)^{\frac{1}{2}}\\
&=(e^{x}+e^{-x})\left((e^{x}+e^{-x})^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=(e^{x}+e^{-x})^{2}
\end{aligned}$$

Donc pour tout $x\in[0;+\infty[$; $\boxed{F'(x)=(e^{x}+e^{-x})^{2}}$

3) pour tout $x\in[0;+\infty[$; $F'(x)=(e^{x}+e^{-x})^{2}$

$$=e^{2x}+e^{-2x}+2$$

Donc $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x+K$ où k est une constante de $\mathbb{R}$; d'où : $K=F(0)$

Or $F(0)=\int_{1}^{u(0)}\sqrt{4+(t-1)^{2}}\,dt=\int_{1}^{1}\sqrt{4+(t-1)^{2}}\,dt=0$; alors $K=0$; donc :

$$(\forall x\in[0;+\infty[)\ ;\ \boxed{F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x}$$

4) L'aire demandée est : $A=\int_{1}^{\frac{5}{2}}|F(x)|\,dx$ (u.a)

$$=\int_{1}^{\frac{5}{2}}F(x)\,dx\quad\text{(u.a)}$$

(Car $F(x)\geq 0$; puisque $t\mapsto\sqrt{4+(t-1)^{2}}$ est continue et ≥ 0 sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $u(x)\geq 1$)

$$A=\left[\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}+x^2\right]_1^{\frac{5}{2}} \quad (u.a)$$

$$=\frac{1}{4}e^{2\times\frac{5}{2}}+\frac{1}{4}e^{-2\times\frac{5}{2}}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}e^{-2}+1\right) \quad (u.a)$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^5+e^{-5}-e^2-e^{-2}+21\right) \quad (u.a)$$

Exercice 2

$$\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right)\ ;\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{-1+e^{2x}}}$$

1) a) $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right)$; $e^{2x}-1>0$ et $x\mapsto e^{2x}-1$ est continue sur $\left]0;+\infty\right[$; $x\mapsto\sqrt{e^{2x}-1}$ et

$x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ sont continues sur $\left]0;+\infty\right[$.

Donc f est continue sur $\left]0;+\infty\right[$.

Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ ne J9+ [: $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{-1+e^{2x}}}\right)'$

$$=\frac{\dfrac{-2e^{2x}}{2\sqrt{-1+e^{2x}}}}{-1+e^{2x}}$$

$$=\frac{-e^{2x}}{-1+e^{2x}\sqrt{-1+e^{2x}}}$$

$$=\frac{-e^{2x}}{\left(\sqrt{-1+e^{2x}}\right)^3}$$

Donc : $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right)$; $f'(x)<0$

Alors f est strictement décroissante sur $\left]0;+\infty\right[$.

Par suite f est bijective de $\left]0;+\infty\right[$ vers $f\left(\left]0;+\infty\right[\right)$; et

$$f\left(\left]0;+\infty\right[\right)=\left]\lim_{x\to+\infty}f(x);\lim_{x\to0^+}f(x)\right[=\left]0;+\infty\right[$$

b) Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ et pour tout $y\in\left]0;+\infty\right[$

$$f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{-1+e^{2y}}=\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow -1+e^{2y}=\frac{1}{x^2}$$

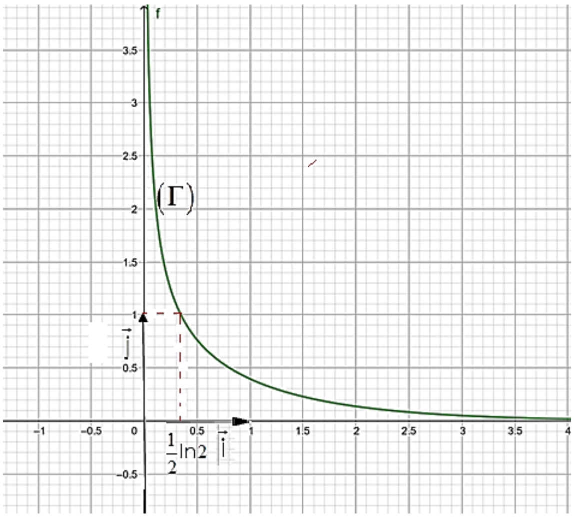
$$\Leftrightarrow e^{2y}=1+\frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2y=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right)$; $\boxed{f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

c) La Courbe de (C)



2) $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$; $h(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right)$

a) $x\mapsto 1+\tan^2 x$ est continue et strictement positive sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, donc h est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$: $h'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)}{1+\tan^2 x}=\tan x$

Alors $h'(x)>0$

donc h est strictement croissante sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Par suite h est bijective de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ vers $J=h\left(\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$; et

$h\left(\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to 0^+}h(x);\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}h(x)\right[=\left]0;+\infty\right[$ (car $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty$)

b) $x\mapsto 1+\tan^2 x$ est dérivable et strictement positive sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$; donc

$h:x\mapsto\ln\left(1+\tan^2 x\right)$ est dérivable et strictement positive sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$; et $\forall x\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$;

$h'(x)=\tan x\neq 0$

Donc h^{-1} est dérivable $h\left(\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]0;+\infty\right[$ et pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$:

$$\left(h^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{h'\left(h^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{\tan\left(h^{-1}(x)\right)}$$

$$\text{Or}\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right),\ f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\text{Donc }\ \forall x\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\ ;\ f^{-1}\left(\frac{1}{\tan x}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right)=h(x)$$

$$\text{D'où : }\frac{1}{\tan x}=f\left(h(x)\right)$$

$$\text{Alors : }\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right),\ \frac{1}{\tan\left(h^{-1}(x)\right)}=(f\circ h)\left(h^{-1}(x)\right)=f\left(\left(h\circ h^{-1}\right)(x)\right)=f(x)$$

$$\text{Donc : }\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right),\boxed{\left(h^{-1}\right)'(x)=f(x)}$$

c) On a : $A(\lambda)=\int_{\ln 2}^{\lambda}\left|f(t)\right|dt \quad \times u.a$

$$=\int_{\ln 2}^{\lambda}f(t)dt \quad \times u.a$$

$$=\int_{\ln 2}^{\lambda}\left(h^{-1}\right)'(t)dt \quad \times u.a$$

$$=\left[h^{-1}(t)\right]_{\ln 2}^{\lambda}\times u.a$$

$$=h^{-1}(\lambda)-h^{-1}(\ln 2)\quad \times u.a$$

Calculons : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$

On a : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}h(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$

$$\text{Et }\ h\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{3}^2\right)$$

$$=\ln 2$$

$$\Rightarrow h^{-1}(\ln 2)=\frac{\pi}{3}$$

$$\text{Alors : }\lim_{\lambda\to+\infty}\left(h^{-1}(\lambda)-h^{-1}(\ln 2)\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Donc : }\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\frac{\pi}{6}}$$

d) $V=\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\left(f(t)\right)^2dt \ \times\|\vec{i}\|^3=\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{1}{e^{2x}-1}dt \quad \times u.v$

$$=\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{1}{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}dt \quad \times u.v$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}dt \quad \times u.v$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{1}{e^x-1}dt-\frac{\pi}{2}\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dt \quad \times U.V$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dt-\frac{\pi}{2}\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dt \quad \times U.V$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\ln\left(1-e^{-x}\right)\right]_{\ln 2}^{2\ln 2}+\frac{\pi}{2}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{\ln 2}^{2\ln 2} \quad \times U.V$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) \quad \times U.V$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{15}{4}\right) \quad \times U.V$$

Donc : $\boxed{V=\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{15}{4}\right) \quad \times U.V}$

3) $(\forall n\in IN)$; $U_n=\int_{\ln\sqrt{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{e^{2nx}-1}}$

a) Montrons que : $(\forall n\in IN)$; $U_n\geq 0$

On a : $\ln\left(\sqrt{2}\right)<1$ et $\forall x\in\left[\ln\left(\sqrt{2}\right);1\right]$; $\frac{1}{\sqrt{e^{2nx}-1}}>0$

Et $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{e^{2nx}-1}}$ est continue sur $\left[\ln\left(\sqrt{2}\right);1\right]$; donc : $\int_{\ln\sqrt{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{e^{2nx}-1}}\geq 0$

Soit $\boxed{U_n\geq 0}$ pour tout $n\in IN$.

b) On a pour tout $x\in\left[\ln\left(\sqrt{2}\right);1\right]$; $2nx<2(n+1)x\Rightarrow e^{2nx}<e^{2(n+1)x}$

$$\Rightarrow\sqrt{e^{2nx}-1}<\sqrt{e^{2(n+1)x}-1}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{e^{2(n+1)x}-1}}<\frac{1}{\sqrt{e^{2nx}-1}}$$

Et $\ln\left(\sqrt{2}\right)<1$; donc : $\int_{\ln\sqrt{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{e^{2(n+1)x}-1}}\leq\int_{\ln\sqrt{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{e^{2nx}-1}}$

D'où : $U_{n+1}\leq U_n$

Par suite $\left(U_n\right)$ est décroissante et comme $\left(U_n\right)$st minorée par 0 ; alors elle est convergente.

c) Soit $n\in IN^*$ et soit : $\ln\sqrt{2}\leq x\leq 1$; alors : $2n\ln\sqrt{2}\leq 2nx\leq 2n\Rightarrow n\ln 2\leq 2nx\leq 2n$; d'où :

$$\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\leq\frac{1}{\sqrt{e^{2nx}-1}}\leq\frac{1}{\sqrt{e^{n\ln 2}-1}}$$

Donc : $U_n\leq\int_{\ln\sqrt{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{e^{2nx}-1}}\leq\frac{1}{\sqrt{e^{n\ln 2}-1}}\int_{\ln\sqrt{2}}^{1}dx$

d'où : $U_n\leq\frac{1}{\sqrt{2^n-1}}\left(1-\frac{1}{2}\ln 2\right)\leq\frac{1}{\sqrt{2^n-1}}$

Donc : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{2^n - 1}}$ (car $\left(1 - \dfrac{1}{2}\ln 2\right) < 1$)

$2 > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2^n - 1} = +\infty$; d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2^n - 1}} = 0$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0}$