Série n°4 d'exercices « Etude de fonction logarithmique » **2éme Bac SM**

EXERCICE 1:

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{x^2-1}{4}2\ln(x)$

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ *admet dans* $]0;+\infty[$ *exactement deux racines dont l'une* $\alpha\in[3\,;4]$

c) vérifier que $\alpha=2$.

2) Soit g la fonction définie sur $[3;+\infty[$ *par :* $g(x)=\sqrt{1+8\ln x}$

Montrer que $g(x)\geq 3$ *et que :* $0\leq g(x)\leq\dfrac{4}{9}$; $\forall x\in[3;+\infty[$

3) Soit la suite réelle (u_n) *définie sur IN par :* $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=g(u_n) \end{cases} \quad (\forall n\in IN)$

a) Montrer que : $(\forall n\in IN)\ u_n\geq 3$

b) Montrer que $|u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{4}{9}|u_n-\alpha| \quad (\forall n\in IN)$

c) Montrer que $|u_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{4}{9}\right)^n \quad (\forall n\in IN)$

d) En déduire que (u_n) *est convergente et calculer sa limite.*

e) Trouver n_0 *pour que :* $|u_{n_0}-\alpha|\leq 10^{-2}$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\ln\left|\sqrt{x}-1\right|$.

On note (C) *sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat trouvé.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que la courbe (C) *admet un point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées et l'équation de la tangente T en ce point.*

5) Tracer la courbe (C) *tout en précisant ses points d'intersection avec l'axe* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 3

I - 1) a) En appliquant le théorème des accroissements finis sur la fonction $t\mapsto\ln(t+1)$

montrer que pour tout réel $u>0$, $\dfrac{u}{u+1}<\ln(1+u)<u \qquad (*)$.

b) Déduire que pour tout réel $x\neq 0$, $\dfrac{x^2}{x^2+1}<\ln(1+x^2)<x^2$

2) Pour $x>1$, *calculer en fonction de x* $I(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{dt}{t(t^2+1)}$ *et* $J(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln(t^2)}{t}dt$

(on pourra remarquer que $\dfrac{1}{t\left(t^2+1\right)}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{t}{t^2+1}$)

II- On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} & si \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Soit F la fonction définie sur IR par : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Utiliser $(*)$ pour montrer que pour tout $x>0$, $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\leq F(x)\leq\dfrac{1}{2}x^2 \qquad (**)$

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

III- Soit G la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} G(x)=\dfrac{F(x)}{x^2} & si\ x\neq 0 \\ G(x)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

1) Montrer que G est paire.

2) a) Vérifier que pour $x>0$ on a : $\dfrac{G(x)-G(0)}{x}=\dfrac{2F(x)-x^2}{x^3}$

b) En utilisant $(*)$ et $(**)$, montrer que G est dérivable à droite en 0 et $G'_d(0)=0$.

3) a) Montrer que pour tout réel $x>0$ on a : $G(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)-2F(x)}{x^2}$

b) En déduire que pour tout réel $x>0$ on a : $G'(x)<0$.

4) a) Montrer que pour tout $x>1$ on a : $\int_1^x \dfrac{\ln\left(1+t^2\right)-\ln\left(t^2\right)}{t}dt=F(x)-F(1)-(\ln x)^2$.

b) En utilisant l'encadrement $(*)$, montrer que pour tout réel $x>1$ on a :

$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)+\ln\left(\sqrt{2}\right)\leq\int_1^x\frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt\leq\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

c) Déduire alors que $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=0$.

5) a) Dresser le tableau de variation de G.

b) Tracer la courbe représentative (C_G) de G dans un repère un orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

EXERCICE 4

1) Soit h la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x\ln x} & si\ x>1 \\ 1 & si\ x=1\end{cases}$

a) Montrer que h est continue à droite en 1.

b) Montrer que pour tout x de $]1;+\infty[$; $\ln x<x-1$.

c) Dresser alors le tableau de variation de h.

d) En déduire que pour tout x de $[1;+\infty[$; $0<h(x)\leq 1$

2) Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $g(x)=\begin{cases}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{t}\ \ln t} & si\ x>1\\ \ln 2 & si\ x=1\end{cases}$

On désigne par (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Vérifier que : $(\forall x>1)$; $\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ \ln t}=\ln 2$

b) Vérifier que : $(\forall x>1)$; $g(x)-\ln 2=\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ \ln t}dt$

c) Montrer que : $(\forall x>1)$; $g(x)-\ln 2=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ \ln t}dt$

3) a) Montrer que : $(\forall x>1)$; $(x-\sqrt{x})h(x)\le g(x)-\ln 2\le(x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})$.

b) en déduire que g est dérivable à droite en 1.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty$

4) a) Montrer que g est dérivable que sur $]1;+\infty[$ et que : $(\forall x>1)$; $g'(x)=\frac{1}{2}h(\sqrt{x})$

b) En déduire que $(\forall x>1)$; $0<g'(x)\le\frac{1}{2}$

Dresser alors le tableau de variation de g .

c) Tracer (C_g).

5) a) Montrer que la fonction $k: x\mapsto g(x)-x+1$ réalise une bijection de $[1;+\infty[$ vers $]-\infty;\ln 2]$.

b) En déduire qu'il existe un unique réel α dans $]1;+\infty[$ tel que : $1+g(\alpha)=\alpha$

6) Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases}u_0\in[1;\alpha[\\ u_{n+1}=1+g(u_n) \quad (\forall n\in IN)\end{cases}$

a) Montrer que : $(\forall n\in IN)$; $1\le u_n<\alpha$.

b) Montrer que (u_n) est strictement croissante .

c) En déduire que (u_n) est convergente et que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

d) Montrer que $(\forall n\in IN)$; $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

e) Montrer que $(\forall n\in IN)$; $|u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$

f) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

EXERCICE 5

1) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} & si\ x>0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$

a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

c) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\forall x>0$; $f'(x)=\frac{-x\ \ln x(1+\ln x)}{\left(1+(x\ \ln x)^2\right)\sqrt{1+(x\ \ln x)^2}}$.

d) Dresser le tableau de variation de f

2) Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par ; $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Déterminer une primitive sur $[e;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$

b) Montrer que $\forall t \geq e\,;\, t\ln t \leq \sqrt{1+(t\ln t)^2} \leq \sqrt{2}\, t\ln t$.

c) Montrer que : $\forall x \geq e\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) \leq \displaystyle\int_e^x \frac{dt}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}} \leq \ln(\ln x)$

d) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}=0$.

e) Montrer que (C) admet deux points d'inflexion qu' on déterminera

f) Tracer (C) (on prendra $F(1)\simeq 0{,}5$ et $F\left(\dfrac{1}{e}\right)\simeq 0{,}4$)

3) Pour tout x de $[0;+\infty[$, on pose $\varphi(x)=x-F(x)$

a) Etudier les variations de φ.

b) Montrer que $(\forall n \in IN)$ l'équation $\varphi(x)=n$ admet une unique solution α_n dans $[0;+\infty[$.

c) Montrer que $(\forall n \in IN)$; $\alpha_n > n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

4) a) Montrer que : $(\forall n \geq 1)\,;\, 0 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \dfrac{F(n)}{n} + f(n)$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n}$