

Exercice 1 :

- 1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $z^2 - 6z + 13 = 0$
- 2) On pose : $u = 2 - 2i$
 - a) Déterminer le module de u .
 - b) Ecrire u sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle
 - c) Montrer que, pour tout entier naturel n : $u^{8n} = 2^{12n}$.
- 3) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, on considère les points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ tels que : $a = 2 - 2i$; $b = 6 - 2i$; $c = 6 + i$; $d = 1 + \frac{7}{2}i$ et Ω est le milieu du segment $[AC]$.
 - a) déterminer ω l'affixe de Ω .
 - b) Montrer que $\frac{c-b}{a-b} = -\frac{3}{4}i$; puis écrire $\frac{c-b}{a-b} = -\frac{3}{4}i$ sous forme exponentielle
 - c) En déduire la nature du triangle ABC
- 4) Soit (Δ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z - 2 + 2i| = |z - 6 - i|$ et (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z - 4 + \frac{1}{2}i| = \frac{5}{2}$.
 - a) Déterminer la nature de (Δ) et de (Γ) .
 - b) Montrer que $B \in (\Gamma)$ et $D \in (\Delta)$.
- 5) Placer les points A ; B ; C et D et tracer (Δ) et de (Γ) .

Exercice 2 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(2; 1; -1)$; $B(0; 2; 1)$ et $C(1; 2; -1)$.

- 1) a) Montrer que A , B et C déterminent un plan.
 b) Montrer qu'une équation du plan (ABC) est $2x + 2y + z - 5 = 0$.
- 2) Soit la droite (Δ) :
$$\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = -4 - \frac{1}{2}\alpha \end{cases} \quad / \alpha \in \mathbb{R} .$$
 - a) Montrer que Δ est perpendiculaire au plan (ABC) puis calculer les coordonnées de leur point d'intersection E .
 - b) Vérifier que $ABCD$ est un parallélogramme puis calculer son aire.
- 3) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1; -1; -4)$ et de rayon $R = 3$
 - a) Calculer la distance de Ω au plan (ABC) ; puis déduire que (ABC) est tangent à (S)

b) Déterminer les coordonnées du point de contact de la sphère (S) et le plan (ABC)

Exercice 3 :

1) On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = \frac{-7u_n - 8}{2u_n + 1} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

a) Calculer u_1 et u_2 .

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \neq 2$.

2) On considère la suite (v_n) telle que : $v_n = \frac{1+2u_n}{2+u_n}; (\forall n \in \mathbb{N})$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.

b) En déduire u_n en fonction de n .

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n + 2| \leq \frac{3}{n}$

d) Calculer la limite de la suite (u_n) de deux façons différentes.

Exercice 4 :

Un sac contient 5 boules blanches, 3 boules rouges et 2 boules noires.

On tire successivement et sans remise, trois boules du sac.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de boules blanches dans un tirage

a) Déterminer les valeurs de X

b) Déterminer la loi de probabilité de X .

c) Calculer $E(X)$.

d) Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$

Problème

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$

1. Étudier les variations de u sur $]0; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. a. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et f' la fonction dérivée de f sur $]0; +\infty[$.

1. Exprimer pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2. En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ on note

* Γ la courbe représentative de la fonction $\ln$ (logarithme népérien)

* A le point de coordonnées $(0; 2)$

* M le point de (C_f) d'abscisse x appartenant à $]0; +\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$

2. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{f(x)}$

a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0; +\infty[$

b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de (C_f) , noté P , dont on précisera les coordonnées.

c. Montrer que $AP = \alpha \sqrt{1 + \alpha^2}$

3. La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

www.guessmaths.co