



PROBLEME I

Soit la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

On note (C_n) la représentation graphique de f_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE A

1- a. Etudier la variation de f selon la parité de n

b. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, étudier la position de (C_{2p}) par rapport à (C_{2p+1})

c. Construire (C_{2p}) et (C_{2p+1}) où $p \in \mathbb{N}^*$ 2- Pour tout $a > 0$, pour tout entier naturel n ,

2- on pose $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$ et $G_n(x) = F_n(x) + \sum_{k=0}^n f_k(x)$

a. Montrer que G_n est une fonction constante que l'on déterminera

b. En déduire une expression de $F_n(x)$ pour tout $x \geq 0$

c. Montrer que F_n est strictement croissante n

d. Démontrer que : $\forall n \geq 1 ; F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t) dt \leq 1$

e. Montrer que $\int_n^{2n} f_n(t) dt = \int_0^n f_n(2n-t) dt$

f. Montrer alors que $\forall n \geq 1 ; 0 \leq F_n(n) \leq \frac{1}{2}$

g. En déduire que $\forall n \geq 1 ; \frac{1}{2} e^n \leq 1 + n + \frac{n^2}{2} + \dots + \frac{n^n}{n!} \leq e^n$

PARTIE B

Soit (y_n) une suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; y_n = f_n(n)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{y_{2n}}{y_n}$

1- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $x_n = \frac{(4n)^n n!}{(2n)!} e^{-n}$

2- a. Montrer que pour $n \leq x \leq n+1$ on a : $\ln\left(\frac{x}{n}\right) \geq (x-n) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

b. Montrer que pour tout $t \geq 1$; $\ln(t) \leq (t-1)$ et que pour tout $x \geq n$