guessmaths

Exercices série n° 9 sur les ensembles et les applications — 1ére Bac SM

Exercice 1

Parmi les applications suivantes préciser si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \to 2n$ $\quad f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \to n+1$ $\quad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \to x^2$ $\quad f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (x-y, x+y)$

$f_5 : \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}$, $x \to \dfrac{2x+1}{x-1}$

Exercice 2

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ et soit $A = [-1,4]$.

1) Déterminer l'image directe de A par f

2) Déterminer l'image réciproque de A par f

Exercice 3

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

1) Vérifier que f est ni injective, ni surjective

2) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$

3) Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$, $x \to f(x)$ est une bijection.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants montrer que f est une bijection de I sur J puis préciser f^{-1}

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $I =]-\infty;2]$; $J = [-1,+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$; $I =]-2,+\infty[$; $J =]-\infty,2[$

3) $f(x) = \sqrt{2x-3} - 1$; $I = \left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right[$; $J = [-1,+\infty[$

4) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$; $I = \mathbb{R}$; $J =]-1,1[$

Exercice 5

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \to 2n$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \to \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si n est pair} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si n est impair} \end{cases}$ deux applications

1) Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et de g

2) Déterminer $f(\mathbb{N})$, $f^{-1}(\mathbb{N})$, $g(\mathbb{N})$ et $g^{-1}(\mathbb{N})$

3) Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Que peut-on conclure ?

Exercice 6

On considère l'application $f : \mathrm{IR}^2 \to IR^3$
$$(x,y) \to (x+y, x-y, 0)$$

1) f est- elle injective ? Surjective ?

2) calculer $f\left(\{(0,1)\}\right), f^{-1}\left(\{(2,1,0);(0,0,0)\}\right)$

3) soit $A = \{(x;0,0) / x \in IR\}$. Calculer $f(A)$

Exercice 7

Soit $f : E \to F$ une application .Montrer que:

1) f est injective si et seulement si $\forall A \in P(E), f^{-1}(f(A)) = A$

2) f est surjective si et seulement si $\forall B \in P(F), f(f^{-1}(B)) = B$

3) f est injective si et seulement si $\forall A \in P(E), \forall B \in P(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 8

Soit E un ensemble et $P(E)$ l'ensemble de ses parties. A et B deux parties de E

On définit l'application $\psi : P(E) \to P(A) \times P(B)$
$$X \to (X \cap A, X \cap B)$$

1) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$

2) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$

3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective .

Donner dans ce cas la bijection réciproque.

Exercice 9

Soit , $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$ trois applications .Montrer que:

1) $g \circ f$ est injective $\Rightarrow$ f est injective

2) $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow$ f est surjective

3) ($g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives) $\Leftrightarrow$ (f , g et h sont bijectives)

Exercice 10

On considère l'application $f : \mathrm{IN} \times IN^* \to IN$
$$(p,q) \to \frac{p}{q}$$

Montrer que f est surjective et n'est pas injective.

Exercice 11

On considère l'application $f : \mathrm{IN}^2 \to IN^*$
$$(p,q) \to 2^p(2q+1)$$

Montre que f est bijective

Exercice 12

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une l'application telle que $f \circ f \circ f = f$

Montre que : f injective $\Leftrightarrow$ f surjective est bijective