Examen Normalisé n° 31 **2éme Bac PC**

Exercice 1: (2.5points)

1) a) Résoudre dans IR l'équation : $x^2-3x+2=0$.
   b) Résoudre dans R l'équation : $9^x-3^{x+1}+2=0$.

2) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation : $\ln(x)+\ln(x+1)\leq\ln(x^2+1)$.

3) Résoudre dans $(]0;+\infty[)^2$ le système : $\begin{cases}2\ln x+\ln y=4\\ \ln x+3\ln y=7\end{cases}$

Exercice 2 : (5points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexe l'équation : $z^2-4z+16=0$

2) On pose $u=2+2\sqrt{3}i$ et $v=\overline{u}$
   a) Ecrire u et v sous forme trigonométrique
   b) Montrer que $u^{15}+v^{15}=-2^{31}$

3) On considère, dans le plan complexe rapporte a un repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$; les points A, B et C d affixes respectives $a=u$, $b=v$ et $c=-4$.
Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l affixe d'un point M' image de M par la rotation R de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   a) Montrer que : $2z'=(1+i\sqrt{3})z-4+4i\sqrt{3}$
   b) Vérifier que le point A est l'image du point B par la rotation R puis déduire la nature du triangle ABC.
   c) Montrer que l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z|=4$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

4) On pose $d=-1+i\sqrt{3}$ l'affixe d'un point D.
   a) Vérifier que D est le milieu du segment $[AC]$ puis déduire que la droite (OD) est la médiatrice du $[AC]$
   b) Montrer que les points B, D et O sont alignés.
   c) Déterminer d l'affixe d'un point F pour laquelle ABCF est un parallélogramme puis montrer qu'elle est losange

Exercice 3 : (2.5points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases}u_0=\frac{3}{2}\\ u_{n+1}=\frac{7u_n-3}{3u_n+1}\end{cases}\quad(\forall n\in IN)$

1) Montrer par récurrence que : $u_n>1$ pour tout $n\in IN$.
2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

3) On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ pour tout $n \in IN$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{3}{4}$.

b) Montrer que $v_n = 2 + \frac{3}{4}n$ pour tout $n \in IN$.

c) déterminer u_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

<u>Exercice 4 :</u> (10 point)

I- Soit g la fonction numérique définie sur IR par: $g(x) = 1 - e^{2x} + 2xe^{2x}$

1) a) Montrer que : $g'(x) = 4xe^{2x}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) dresser le tableau de variations de la fonction g sur IR.

2) Montrer que $g(x) \geq 0$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

II- soit la fonction numérique définie sur IR par : $f(x) = x - (1-x)e^{2x}$.

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 1cm)

1) a) Montrer que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b) Montrer que (C) admet une asymptote (Δ) au voisinage de $-\infty$ d'équation $y = x$.

c) Montrer que (C) est au-dessous de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty;1]$ et au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

2) a) calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage $+\infty$.

3) a) Montrer que $f'(x) = g(x)$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) interpréter géométrique le résultat $f'(0) = 0$.

c) Montrer que la fonction f est croissante puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur IR.

4) Montrer que $I(0;-1)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C).

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans IR et que : $\ln 2 < \alpha < 1$.

6) Construire (Δ) et (C) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_{\ln 2}^{1} xe^{2x}dx = \frac{e^2}{4} - 2\ln 2 + 1$.

III- Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $h(x) = f(x)$.

1) montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera puis tracer sa courbe dans le repère précédant.

2) calculer $(h^{-1})'(1)$ (remarquer que $h(1) = 1$)

3) Construire $(C_{h^{-1}})$ la courbe de h^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.