

Exercice 1

1) Montrer que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$, admet une racine unique dans $[-2; 0]$

2) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - x} - 3x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x - x^3} + x$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{2x - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x + 22} - 3}{2x - 10}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

2) Résoudre l'inéquation suivante : $\sqrt[5]{2x - 1} \geq 2$

Exercice 2

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} - 1$

1) Déterminer D_f .

2) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3) Etudier la dérivabilité de la fonction f en $x = 0$; puis interpréter géométriquement le résultat.

4) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

5) Donner le tableau de variation de f .

6) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'il faut déterminer.

7) Calculer $f(1)$ puis montrer que f^{-1} est dérivable en $f(1)$ et déterminer : $(f^{-1})'(f(1))$

8) Déterminer $(f^{-1})'(x)$ pour tout x de J .

Exercice 3

Soient la fonction f continue sur $[a; b]$ et $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres réels dans $[a; b]$.

et $f([a; b]) = [m; M]$. On pose : $\sum_{i=1}^n f(x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$

1) Montrer que : $m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M$

2) En déduire : $(\exists c \in [a; b]) : f(c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul et soient a, b des nombres réels.

On considère la fonction f_n définie par :
$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{(3-x)^n - a}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ f_n(x) = \frac{3x+b}{4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que la fonction f_n soit continue en 2.

Exercice 5

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{x^2 + \sin(x)}{x}$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement.

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 5

1) On considère la fonction g définie par : $g(x) = 1 - x + \sin x$

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

2) On considère la fonction h définie par : $h(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 6

Soit f une fonction définie de $[0;1]$ vers $[0;1]$ telle que f est continue sur $[0;1]$.

Démontrer que : $\exists c \in]0;1[/ f(c) + f(1-c) = 2c$.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$

2) $x + \sqrt[3]{x} = 2$

3) $\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x-a} = \sqrt[3]{b}$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x \arctan\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Démontrer que f est continue en 0.

2) Démontrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; f(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x}{2}\arctan(x)$; puis déduire une expression à $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right) = \frac{5\pi}{12}$.

- Démontrer que l'équation (E) $\Leftrightarrow f(x) = \frac{5\pi}{12}\sqrt{x}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$
- Déterminer l'ensemble des solutions de (E)

Exercice 9

On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ définie par : $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1$

On propose de résoudre cette équation de deux manières différentes. Les questions A) et B) suivantes sont

donc totalement indépendantes.

A) Première méthode :

- Vérifier que $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2) ; (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
- Démontrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') suivante :

$$\sqrt{\cos(x)\sin(x)}(2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x)) = 0$$
- Justifier que $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) ; 2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) > 0$.
- En déduire les solutions de l'équation (E)

B) Deuxième méthode :

- Démontrer que $(\forall a \in]0;1[) ; \sqrt{a} > a^2$.
- En déduire que $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) ; \sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} > 1$.
- Retrouver les solutions de l'équation (E).

Exercice 10

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$?, on considère la fonction $f_n : \begin{matrix} [0;1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n - (1-x)^2 \end{matrix}$

- Dans cette question, l'entier $n \in \mathbb{N}$ est fixé.
 - Étudier la monotonie de la fonction f_n sur $[0;1]$.
 - Démontrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0;1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
- On considère maintenant la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$?.
 - Déterminer le signe de $f_n(\alpha_{n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$?.
 - À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
 On notera $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.
 - Montrer que $\alpha \neq 0$.
 - Supposons que $0 < \alpha < 1$.

i. Montrer qu'alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^n = 0$.

ii. À l'aide de la relation $f_n(\alpha_n) = 0$, en déduire que $(1 - \alpha)^2 = 0$.

f) Conclure sur la valeur de α .

Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction f_n définie sur par : $f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{x}$

1) a) Montrer que : $(\forall x > 0) ; \frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x$

b) Montrer que la fonction f_n est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α_n dans $]0; +\infty[$

3) a) Montrer que : $(\forall x > 0) ; f_{n+1}(x) > f_n(x)$; puis déduire la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1 < \alpha_n < \pi$

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dont la limite l vérifie $1 < l < \pi$

4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2\arctan(n) < \alpha_n < 2\arctan(n\pi)$; puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

5) a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left((\pi - x) \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right)$ (on posera : $X = \frac{\pi - x}{2}$)

b) déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\pi(\pi - \alpha_n)) = \frac{2}{\pi}$

Exercice 12 :

On considère la fonction f définie par : $\left(\forall x \in I = \left[2\pi; \frac{13\pi}{6} \right] \right) ; f(x) = \tan^2 x - \frac{2}{\sqrt{3}} \tan x$.

(1,5pts) 1) Montrer que f est une bijection de I sur J qu'on déterminera.

(1,5pts) 2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 13 : Suites implicites

Soit $n \in \mathbb{N}$; on considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par : $f_n(x) = x^n + \frac{\arctan(x)}{n}$

1) Montrer que f_n réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$.

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique a_n et que : $0 < a_n < 1$.

3) Soit $x \in]0; 1[$.

a) comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

b) Déduire le sens de variation de la suite (a_n) .

4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1 - \frac{\pi}{4n} < (a_n)^n < 1$