

Intégrale et aire

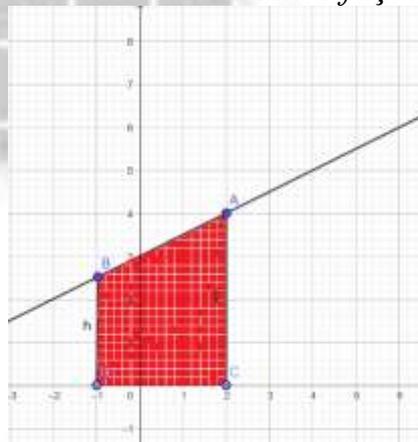
Exercice 1

On considère la fonction affine f dont la courbe ci-contre passe par les points A et B.

- 1) Déterminer l'expression de $f(x)$.
- 2) En déduire une primitive F de f .
- 3) a) Déterminer l'intégrale $\int_{-2}^1 f(x)dx$ à l'aide de F .

En déduire l'aire du domaine colorié.

- b) Déterminer l'aire du domaine colorié d'une autre façon

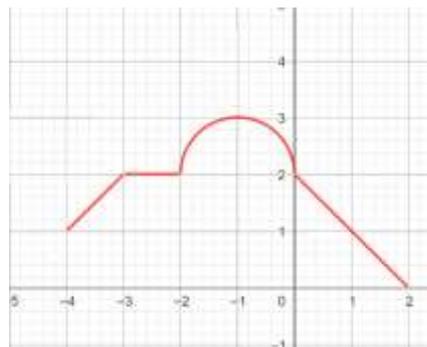


Exercice 2

On a tracé la courbe d'une fonction f définie sur $[-4;2]$.

Sur $[-2;0]$ la courbe est un demi-cercle.

- 1) Déterminer $\int_{-4}^{-2} f(x)dx$, puis $\int_{-2}^0 f(x)dx$, puis $\int_0^2 f(x)dx$
- 2) En déduire $\int_{-4}^2 f(x)dx$



Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_{-1}^2 (2x^5 - x^2 - 1) dx \quad b) \int_0^{-1} (1 - x^2)(2 + 3x) dx \quad c) \int_2^5 \frac{2}{3} dx \quad d) \int_1^4 \frac{1}{n} dt$$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_0^1 \frac{1}{1+2x} dx \quad b) \int_1^e \frac{6x^2 + 4x - 1}{x} dx \quad c) \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx \quad d) \int_1^4 \frac{1}{3t} - \frac{3}{t^2} dt$$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_0^1 \left(e^{-x} + \frac{6}{e^{2x}} \right) dx \quad b) \int_{-1}^2 x e^{-x^2} dx \quad c) \int_0^4 \frac{3}{\sqrt{2x+1}} dx$$

Exercice 6

Calcul intégrale avec un quotient de polynôme :

1) Etudier suivant les valeurs du réel x , le signe de $x^2 + 2x + 5$.

2) En déduire la valeur de $\int_{-2}^1 \frac{x+1}{x^2 + 2x + 5} dx$

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_{-4}^{-2} (x-1) dx \quad b) \int_5^2 \frac{1}{2x+1} dx \quad c) \int_{-2}^1 e^{2t-1} dt$$
$$d) \int_0^1 \frac{x^2 + x - 1}{4} dx \quad e) \int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \quad f) \int_0^3 \frac{1}{(2x+1)^2} dx \quad g) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx$$
$$h) \int_1^3 \frac{t^2 - 2t + 3}{t} dt$$

Exercice 8

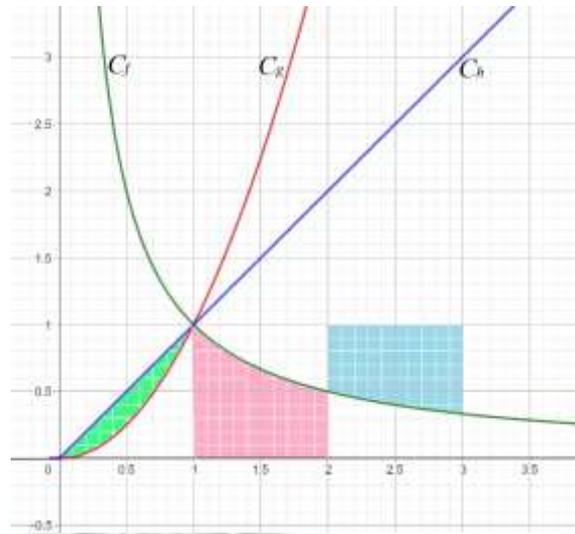
On a tracé la courbe de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

On a tracé également les courbes des fonctions g et h définies sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2$ et $h(x) = x$.

1) Déterminer l'aire du domaine rose.

2) Déterminer l'aire du domaine bleu.

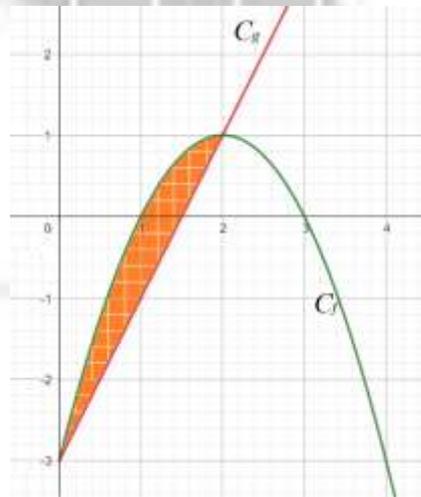
3) Déterminer l'aire du domaine vert.



Exercice 9

On a représenté les courbes des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = (1-x)(x-3)$ et $g(x) = 2x - 3$.

Déterminer l'aire de la surface hachurée.

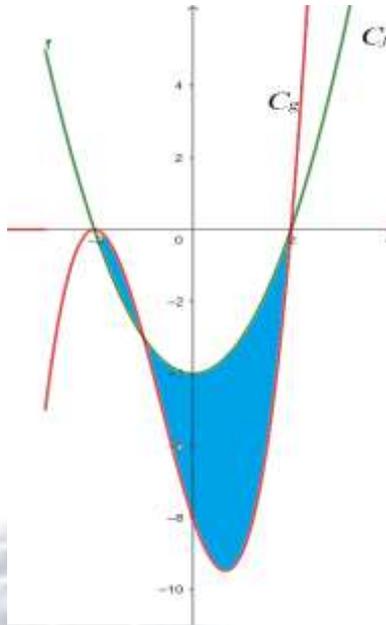


Exercice 10

C_f et C_g sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 - 4 \text{ et } g(x) = (x+2)^2(x-2).$$

- 1) Etudier la position relative de leurs courbes représentatives.
- 2) En déduire l'aire A du domaine en unité d'aire compris entre les deux courbes sur l'intervalle $[-2; 2]$.



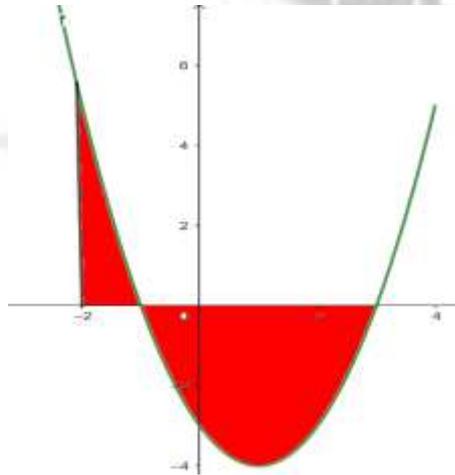
Exercice 11

La courbe C représentée dans un repère orthogonal, la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

Les unités graphiques sont : 1cm sur l'axe des abscisses et 0.5cm sur l'axe des ordonnées.

- 1) Etudier la position relative de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses.
- 2) En déduire l'aire A du domaine en unité d'aire puis en cm^2 compris entre la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 3$.

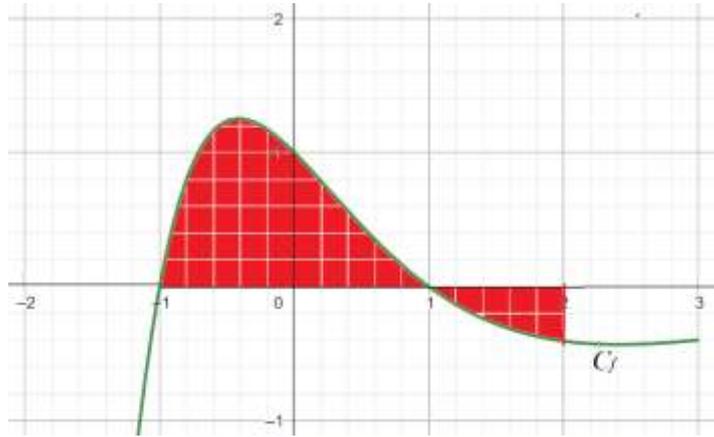


Exercice 12

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$.

Dont on a tracé la courbe ci-dessous :

- 1) Déterminer a , b et c tels que la fonction définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de f .
- 2) En déduire l'aire de la surface bleue.



Exercice 13

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	-4	1	2	$+\infty$
f	1	3	0	-5	-1

On définit la fonction F sur \mathbb{R} par : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

- 1) Déterminer le tableau de variations de F .
- 2) Déterminer le signe de l'intégrale $\int_1^3 f(t) dt$ et de $\int_1^{-5} f(t) dt$.
- 3) Déterminer la limite de F en $+\infty$ et en $-\infty$

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$.

Pour tout réel x , on pose : $I(x) = \int_3^x f(t) dt$.

- 1- Déterminer le signe de $I(x)$ en fonction de x , en justifiant.
- 2- a) Calculer $I(\alpha)$; où $\alpha > 3$
 b) Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha)$

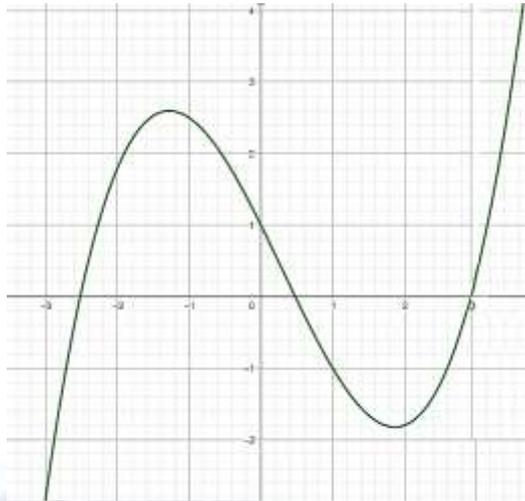
Exercice 15

Soit f une fonction définie $[-2;5]$ et F une primitive de f .

On a tracé la courbe de F ci-dessous :

- 1) Déterminer le tableau de signe de f sur $[-2;5]$.

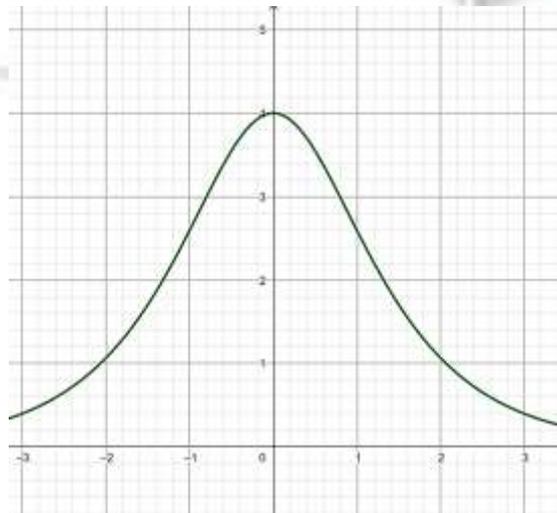
2) Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_1^3 f(t)dt$.



Exercice 16

On a tracé ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

- 1) Comparer les intégrales $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_1^2 f(x)dx$
- 2) Comparer les intégrales $\int_{-2}^0 f(x)dx$ et $\int_0^2 f(t)dt$.
- 3) Encadrer l'intégrale $\int_{-1}^2 f(t)dt$.



Suites et Intégrales

Exercice 1

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; On pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

1) Montrer que la fonction F définie sur $[0;1]$ par : $F(x) = -(1+x)e^{1-x}$ est primitive de la fonction une $x \mapsto xe^{1-x}$ sur $[0;1]$

2) Calculer I_1

3) on admet que ; pour tout entier $n \geq 1$; on a : $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

Calculer I_2

4) a) Montrer pour tout $n \geq 1$; on a : $(\forall x \in [0;1]) ; 0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$

b) justifier que pour tout $n \geq 1$; on a : $\int_0^1 x^n \cdot e dx = \frac{e}{n+1}$

c) En déduire que pour tout $n \geq 1$; $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

Exercice 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$

1. Montrer que : $I_0 = \ln 2$.

1. a) Calculer $I_0 - I_1$

b) Déduire I_1 .

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$

Exercice 3

Soit (I_n) la suite définie par : $I_n = \int_1^e x dx$ et pour tout entier $n \geq 1$ par : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1. Calculer I_0 .

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \geq 1$: $2I_n + nI_{n-1} = e^2$.

3. En déduire I_1 .

4. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

5. Déduire des questions 2. et 4. que pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$

6. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$