Série n° 2 d'exercices corrigés « Fonction Exponentielle »

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C_f *la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par :* $f(x) = x + e^{-x}$

1. *Justifier que* C_f *passe par le point A de coordonnées (0;1).*
2. *Déterminer le tableau de variation de la fonction f. On précisera les limites de f en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.

CORRECTION

1. $f(0) = 0 + e^{0} = 1$

Donc la courbe C_f *passe par le point A de coordonnées (0;1).*

f est définie et dérivable sur IR et :

$f'(x) = 1 - e^{-x}$

$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leqslant 1$

Du fait de la stricte croissance de la fonction

2. *exponentielle :*

$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

Donc, par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Pour la limite en $-\infty$ *on a une forme indéterminée du type «*$+\infty - \infty$*». On peut lever cette indétermination en mettant x en facteur :*

$$f(x) = x\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$$

En posant $X = -x$ *on voit que :* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{e^{X}}{X} = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = -\infty$ *et par produit :*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = +\infty$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE 2

Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x) = e^{x}$ *et* $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$.

On note C_f *et* C_g *les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.*

1. *Démontrer que les courbes* C_f *et* C_g *ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.*

2. Étude de la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ

Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

b. Justifier que, pour tout réel x, $h(x) = x\left(\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{x} - 1 - \frac{2}{x}\right)$

En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

c. On note h′ la fonction dérivée de la fonction h sur IR.

Pour tout réel x, calculer h'(x) et étudier son signe suivant les valeurs de xx.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur IR.

e. En déduire que, pour tout réel x, $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.

f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ ?

3. Étude de la position relative des courbes C_f et C_g

Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$

Déterminer la position relative des courbes C_f et C_g .

CORRECTION

Soient $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$ deux fonctions définies sur IR.

1) On voit aisément que $f(0) = g(0) = 1$, ce qui implique que les courbes représentatives C_f et C_g de f et g ont un point commun d'abscisse 0 et d'ordonnée 1. Le coefficient directeur des tangentes en ce point à C_f et C_g est donnée, respectivement, par les valeurs de $f'(0)$ et $g'(0)$. on a : $f'(x) = e^x$ d'où $f'(0) = 1$ et $g'(x) = e^{\frac{x}{2}}$ d'où $g'(0) = 1$. Donc les tangentes en $(0;1)$ à C_f et C_g ayant même coefficient directeur elles sont confondues en une seule droite Δ dont on détermine facilement l'équation : $y = x + 1$.

2) Soit $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$ définie sur IR.

a) En observant que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$.

b) On peut écrire $h(x) = x\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right)$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

c) On calcule la dérivée de h : $h'(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$. La fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ est croissante sur IR et l'image de l'intervalle $[0;+\infty[$ est l'intervalle $]-\infty;+\infty[$. On a $h'(0) = 0$ et donc : $h'(x) < 0$ pour $x < 0$ et $h'(x) > 0$ pour $x > 0$

d) En remarquant que $h(0) = 0$, on peut dresser le tableau de variation de h sur IR:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

e) D'après le tableau ci-dessus, on voit que $h(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in IR$ *. C'est à dire* $2e^{\frac{x}{2}} - x - 2 \geq 0$ *d'où l'on tire :* $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$.

f) On en déduit que Δ *est au -dessous de* C_g *sauf pour* $x = 0$ *où elle est tangente à* C_g *.*

3.a) $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1$

b) On remarque que $f(x) - g(x) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1$ *. De plus, étant un carré qui s'annule pour* $x = 0$*, alors* $f(x) - g(x) \geq 0$ *sur IR. D'où l'on déduit que :* $f(x) \geq g(x)$ *pour tout* $x \in IR$*, et* C_f *est au -dessus de* C_g *sauf pour* $x = 0$ *où les deux courbes sont tangentes.*