GUESSMATHS

Revue n°1 : Chapitre « limites et continuité»

2éme Bac SC. Expérimentales et Sc .Eco

Contenue du chapitre :

- Résumé du cours
- Exercices d'application
- Astuces et méthodes
- Série d'exercices corrigés

1er Conseil aux bacheliers afin de bien préparer leur Examen

Comme dit le proverbe français « rien ne se perd rien ne se crée tout se transforme »

Alors le secret de la réussite c'est de travailler régulièrement.

LIMITES ET CONTINUITÉ
(Partie 1)

I. Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite finie à l'infini

Intuitivement :

On dit que la fonction f admet pour limite L en +∞ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :

La fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers +∞.

En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.

Définition :

On dit que la fonction f admet pour limite L en +∞ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de f (x) dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Définitions :

- La droite d'équation y = L est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de +∞ si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.
- La droite d'équation y = L est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $-\infty$ si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Remarque :

Lorsque x tend vers +∞ , la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote.
La distance MN tend vers 0.

2) Limite infinie à l'infini

Intuitivement :

On dit que la fonction f admet pour limite +∞ en +∞ si f (x) est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :

La fonction définie par : $f(x)=x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand.

Si on prend un réel α quelconque, l'intervalle $]\alpha;+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment grand.

Définitions :

- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]\alpha;+\infty[$, α réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty;\beta[$, β réel ; contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Remarque :

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.
- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.

3) Limites des fonctions usuelles

Propriétés :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$

II. Limite d'une fonction en un réel a

Intuitivement :

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en a si f (x)est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de a.

Exemple :

La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de a.
Si on prend un réel α quelconque, l'intervalle $]\alpha;+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de a.

Définitions :

- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle $]\alpha;+\infty[$, α réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en a si tout intervalle $]-\infty;\beta[$, β réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a et on note : $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

Définition :

La droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Remarque :

Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel a selon $x > a$ ou $x < a$.

Considérons la fonction inverse définie sur IR* par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Si $x < 0$, alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note : $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.
- Si x > 0, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

On parle de limite à gauche de 0 et de limite à droite de 0.

Déterminer graphiquement des limites d'une fonction :

III. Opérations sur les limites

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

* **Forme indéterminée** : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

2) Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	l	$l\neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	l'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)$	$l\times l'$	∞	∞	F.I

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple :

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2)$?

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (3+x^2) = +\infty$

D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2) = -\infty$

Remarque :

On rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :"$\infty - \infty$ ", "$0\times\infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ " et "$\frac{0}{0}$".

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l\neq 0$	l	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	0	∞	l	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	∞	0	∞	F.I	F.I

On applique la règle des signes pour déterminer si le quotient est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple :

Calculer $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-2x}{x-3}$

- $\lim\limits_{x\to 3} 1-2x=-5$
- $\lim\limits_{x\to 3^-} x-3=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} x-3=0^+$

D'après les règles de calcul sur limites de quotient on obtient :

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{1-2x}{x-3}=+\infty \text{ et } \lim_{x\to 3^+}\frac{1-2x}{x-3}=-\infty$$

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles

Calculer :

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-3x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-3x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6}$

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-3x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

On a : $\lim\limits_{x\to 4} -3x+2\sqrt{x}+1=-7$ et $\lim\limits_{x\to 4}\left|\sqrt{x}-2\right|=0^+$

D'après les règles de calcul sur limites de quotient on obtient :

$$\lim_{x\to 4}\frac{-3x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}=-\infty$$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-3x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6}$

On a : $\lim\limits_{x\to 1} -3x+2\sqrt{x}+1=0$ et $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}+6=7$

D'après les règles de calcul sur limites de quotient on obtient :

$$\lim_{x\to 1}\frac{-3x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}=0$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ "

Levons l'indétermination :

$$\text{On a : } \frac{3x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6} = \frac{\sqrt{x}\left(3\sqrt{x}+2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\dfrac{6}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}+2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{6}{\sqrt{x}}}$$

$$\text{Or } \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 3\sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{cases}.$$

Donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\sqrt{x}+2+\dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, on a par produit et somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{6}{\sqrt{x}} = 1$.

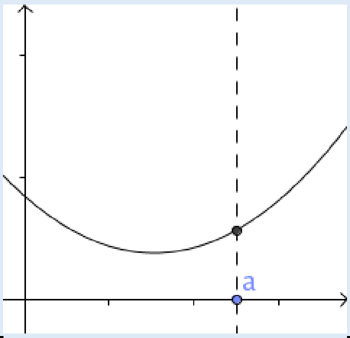
D'après les règles de calcul sur limites de quotient on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6} = +\infty$$

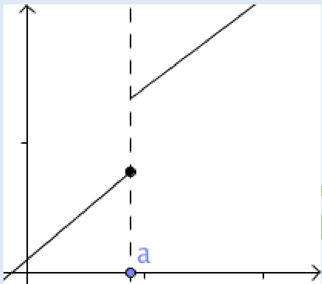
Continuité en un point

Définition : soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a.

on dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$



f est continue en a



f n'est pas continue en a

Exercice d'application

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{|x| - 1} \\ f(1) = 1 \end{cases}$

Etudier la continuité de f au point d'abscisse $x_0 = 1$

Réponse

On a : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - |x|}{|x| - 1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{|x|(|x| - 1)}{|x| - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} |x|$$

$$= 1$$

Donc : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$; par suite f est continue en $x_0 = 1$.

Continuité à droite et à gauche

Définition : 1) soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b[$

on dit que f est continue à droite en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

on dit que f est continue à gauche en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Propriété :

f est continue en a si et seulement si f est continue à droite en a et continue à gauche en a.

Définitions :

1) On dit que f est continue sur l'intervalle ouvert I si elle est continue en tout point de I.

2) on dit que f est continue sur l'intervalle $[a;b]$ si f est continue sur $]a;b[$ et à droite en a et à gauche en b.

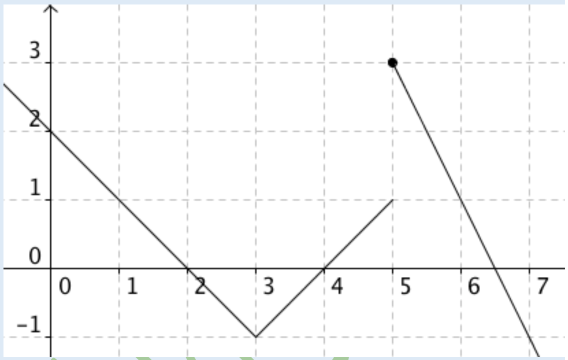
Méthode : Étudier la continuité d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = -x+2 & ;\textit{pour} \quad x<3 \\ f(x) = x-4 & ;\textit{pour} \quad 3 \le x < 5 \\ f(x) = -2x+13 & ;\textit{pour} \quad x \ge 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Les fonctions $x \mapsto -x+2$; $x \mapsto x-4$ et $x \mapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty;3[$, sur $[3;5[$ et sur $[5;+\infty[$.



Étudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} -x+2 = -1$

  $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} x-4 = -1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

D'où la fonction f est continue en 3.

- $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} x-4 = 1$

  $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} -2x+13 = 3$

Donc : $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$

On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.

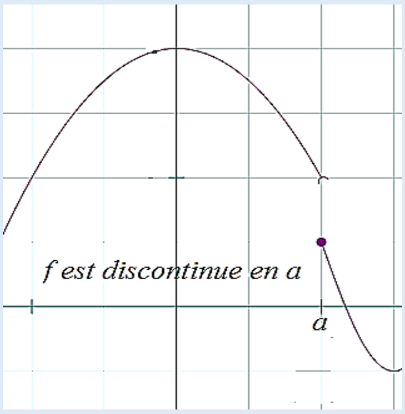
La fonction f n'est donc pas continue en 5.

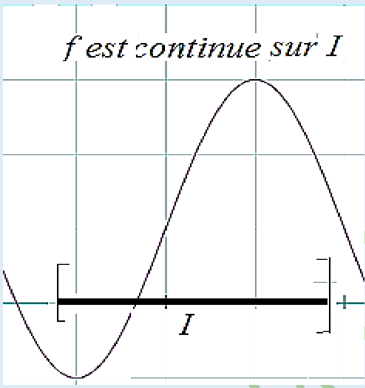
La fonction f est continue sur $]-\infty;5[$ et sur $[5;+\infty[$.

Exercice d'application

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x + a\sqrt{x^2+x+1} & ;si\ x \le 0 \\ f(x) = x + a\sqrt{x^2+x+1} & ;si\ \ 0 < x \le 1 \\ f(x) = bx - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} & ;si\ x < 1 \end{cases}$

1. Déterminer a et b pour que la fonction f soit continue en $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$





Propriétés :

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$; cosinus ; sinus et tangente sont continues sur leur domaine de définition.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et IR alors :

1) les fonctions $f+g$; $k \times f$; $f \times g$ et $|f|$ sont continues sur I

2) si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I

3) si $g \ge 0$ sur I alors $\sqrt{g}$ est continue sur I.

Composée de fonctions continues :

Théorème1 :

1) si f est continue en a et g continue en $b = f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en en a.

2) si f est continue sur I et g continue sur J avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I

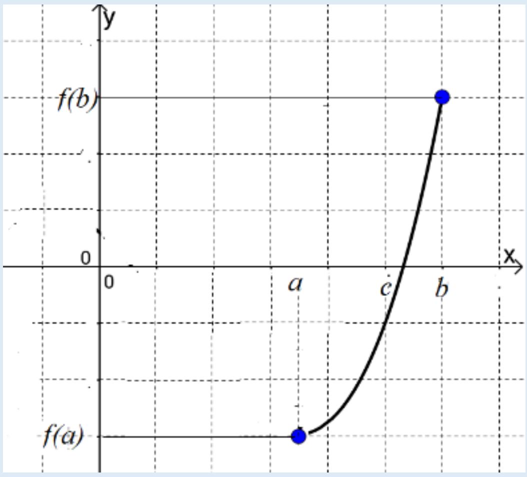
Théorème2 :

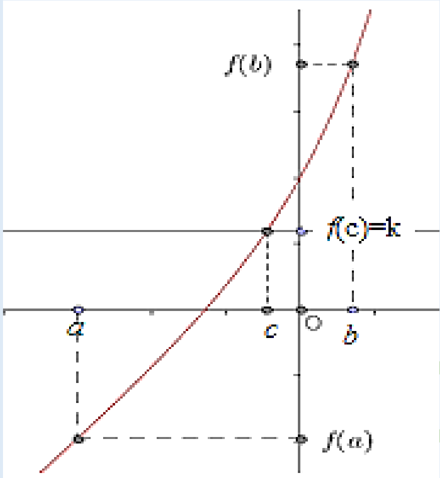
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et g est continue en b alors : $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = g(b)$

__*Théorème des valeurs intermédiaires(T.V.I)*__ :

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ .Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c dans $]a;b[$ tel que : $f(c)=k$

__*Exemple*__ :





__Corollaire 1 :__

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ telle que : $f(a)\times f(b)<0$ alors il existe au moins un réel c dans $]a;b[$ tel que : $f(c)=0$

__Corollaire 2 :__

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$ telle que : $f(a)\times f(b)<0$ alors il existe un unique réel c dans $]a;b[$ tel que : $f(c)=0$

Image d'un intervalle par une fonction continue

Rappel :

- I intervalle de IR si $\forall(a,b)\in I^2 / a<b \quad :[a,b]\subset I$
- $f(I)=\{f(x)/x\in I\}$ image de I par f.

__Méthode :__ Résolution approchée d'une équation

EXEMPLE 1

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)=x^3-3x^2+2$.

1) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2,5;5]$.

1) • <u>Existence de la solution :</u>

- La fonction f est **continue** sur l'intervalle $[2,5;5]$.
- $f(2,5)=2,5^3-3\times2,5^2+2=-1,125<0$

$f(5)=5^3-3\times5^2+2=52>0$

Alors la fonction f **change de signe** sur l'intervalle $[2,5;5]$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution.

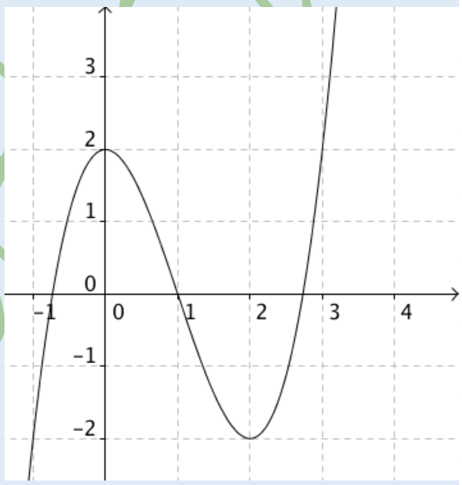
• <u>Unicité de la solution :</u>

$f'(x)=3x(x-2)$

Donc, pour tout x de $[2,5;5]$; $f'(x)>0$

La fonction f est donc **strictement croissante** sur l'intervalle $[2,5;5]$.

On en déduit que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[2,5;5]$.



<u>**Remarque :**</u> Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie.

<u>Méthode de dichotomie</u>

La **méthode de dichotomie** est une méthode pour trouver une solution approchée à une équation $f(x)=0$. Précisément, supposons que la fonction f est continue sur l'intervalle $[a;b]$, avec $f(a)\times f(b)<0$. On sait donc qu'il existe au moins un réel c dans l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c)=0$.

L'idée est alors d'évaluer ce que vaut f au milieu de $[a;b]$, et de distinguer les deux cas suivants

- si $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ est du même signe que $f(a)$ alors on sait qu'on a une racine dans l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$.
- sinon, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ est du signe contraire que $f(a)$ et on sait qu'on a une racine dans l'intervalle $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$.

Ainsi, dans les deux cas, on a trouvé un intervalle de longueur moitié dans lequel est situé une racine de l'équation $f(x)=0$. On recommence alors avec cet intervalle, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve une approximation qui nous convienne (càd d'amplitude demandée)

Exemple

On a représenté ci-dessous la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 7x$.

L'objectif est de déterminer, sur l'intervalle $[2\ ;4]$ un encadrement de la solution α de l'équation $f(x)=0$ avec une précision p choisie.

En effet, sur l'intervalle $[2\ ;4]$, la fonction f est strictement croissante et donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique qu'on notera α.

Le principe, appelé dichotomie, est le suivant :

- On calcule l'image du centre de l'intervalle $[2\ ;4]$: Le centre de l'intervalle est 3 et $f(3)>0$.

Donc $\alpha<3$.

- On poursuit donc la recherche de a sur l'intervalle $[2\ ;3]$.
- On calcule l'image du centre de l'intervalle $[2\ ;3]$: Le centre de l'intervalle est 2,5 et $f(2{,}5)<0$.

Donc $\alpha>2{,}5$.

- On poursuit donc la recherche de a sur l'intervalle $[2{,}5\ ;3]$. On répète le processus tant que l'amplitude de l'intervalle est supérieure à la précision choisie.

Fonction racine $n^{ième}$

Soit $n\in IN^*$ et soit f la restriction de la fonction $x\mapsto x^n$ à IR^+

f est continue et strictement croissante sur IR^+ et $f(IR^+)=IR^+$

donc f est admet une fonction réciproque définie sur $f(IR^+)=IR^+$, sa fonction réciproque

f^{-1} se note $\sqrt[n]{\ }$ et s'appelle la fonction racine $n^{ième}$

$(\forall x\in IR^+)(\forall y\in IR^+) : x^n = y \Leftrightarrow x=\sqrt[n]{y}$

$\sqrt[1]{x}=x$; $\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$ *Racine carré de* x ; $\sqrt[3]{x}$ *racine cubique de* x

Conséquence :

1) la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie, continue et strictement croissante sur IR^+

2) $(\forall x \in IR^+) : \sqrt[n]{x^n} = x$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ $(\forall x \in IR^+) : \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

3) $(\forall (x;y) \in IR^+ \times IR^+) : x < y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$

4) $(\forall (x;y) \in IR^+ \times IR^+) : x = y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$

5) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Équation : $x^n = y$ dans IR (discuter)

Si est impair l'équation admet une seule solution

Si n pair et $y > 0$ l'équation admet deux solutions $\sqrt[n]{y}$ et $-\sqrt[n]{y}$

Si n pair et $y < 0$ l'équation n'admet pas de solutions.

<u>Opérations sur les racines $n^{ème}$</u>

Pour tous réels positifs a ; b et pour tous entiers naturels non nuls n et p on a :

1) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ 2) $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$ 3) $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$ 4) $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

5) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Propriétés :

1) Si f est continue et positive sur I alors $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I

2) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f} = +\infty$

3) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in IR^+$ alors $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{l}$

Puissance rationnelle d'un réel positif (extension de la puissance entière)

Remarque :

$(\forall x \in IR^+)(\forall n \in IN^*) :$ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Opérations sur les puissances rationnelles

Propriétés : soient $(a,b)\in\left(IR_+^*\right)^2$ et $(r,r')\in Q^2$

1) $\left(a^r\right)^{r'}=a^{rr'}$ 2) $a^{r+r'}=a^r\times a^{r'}$ 3) $a^r\times b^r=(ab)^r$ 4) $\dfrac{1}{a^r}=a^{-r}$

5) $\dfrac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$ 6) $\dfrac{a^r}{b^r}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^r$

Exercice d'application

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}$

1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

b) Etudier la continuité de f sur D_f .

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Montrer que f est strictement croissante sur D_f .

4) Déduire que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J qu'on déterminera

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

LIMITES ET CONTINUITE : Méthodes et Astuces

1) Si on veut montrer que f est continue en a.

- On peut revenir à la définition : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

2) Si on veut montrer que f est continue sur intervalle ouvert I.

- On peut montrer que f est continue en tout point de a de I.
- On peut utiliser les opérations sur les fonctions continues.

3) Si on veut prouver qu'une équation admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$

- On peut penser à l'écrire sous la forme $f(x) = \lambda$ avec f continue sur $[a;b]$, puis vérifier que λ est une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$
- On peut penser à l'écrire sous la forme $f(x) = 0$ avec f continue sur $[a;b]$, puis vérifier que $f(a) \times f(b) < 0$.

4) Si on veut montrer que f est une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J

- On peut montrer que f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I, puis vérifier que $f(I) = J$.

5) Si on veut prouver qu'une équation admet une unique solution dans l'intervalle I

- On peut penser à l'écrire sous la forme $f(x) = \lambda$ avec f continue et strictement monotone sur l'intervalle I ; puis vérifier que $\lambda \in f(I)$.
- On peut penser à l'écrire sous la forme $f(x) = 0$ avec f continue et strictement monotone sur I ; puis vérifier que $0 \in f(I)$.
- Si I est un segment, on peut penser au théorème des valeurs intermédiaires.

6) Si on veut prouver qu'une équation admet une unique solution dans l'intervalle I

- On peut penser à l'écrire sous la forme $f(x) = \lambda$ avec f continue et strictement monotone sur l'intervalle I ; puis vérifier que $\lambda \in f(I)$.
- On peut penser à l'écrire sous la forme $f(x) = 0$ avec f continue et strictement monotone sur I ; puis vérifier que $0 \in f(I)$.

Série d'exercices corrigés

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{1-\sqrt{x}}$

2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-x^2}{x-\sqrt{x}}$

3) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

4) $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x}{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+7}-5}{x^2-1}$

6) $\lim\limits_{x\to2^+}(2-x)\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

Correction Exercice 1

1) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{1-\sqrt{x}}$ en remplaçant x par 1 on obtient une forme indéterminée $"\dfrac{0}{0}"$

Levons l'indétermination en éliminant ce zéro qui nous cause problème

Pour $x\neq1$ on a : $x^3-2x^2+x=x\left(x^2-2x+1\right)$

$$=x(x-1)^2$$

Donc : $\sqrt{x^3-2x^2+x}=\sqrt{x}(x-1)$ (car $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=x-1$ et $x>1$)

Et $1-\sqrt{x}=\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}}$

$$=\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}$$

D'où $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x}(x-1)}{\dfrac{1-x}{1+\sqrt{x}}}$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}(x-1)}{-\dfrac{x-1}{1+\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to1^+}-\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)$$

$$=-2$$

$$\boxed{\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{1-\sqrt{x}}=-2}$$

2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-x^2}{x-\sqrt{x}}$ en remplaçant x par 0 on obtient une forme indéterminée $"\dfrac{0}{0}"$

Levons l'indétermination en éliminant ce zéro qui nous cause problème

Pour $x \neq 0$ on a : $\dfrac{x-x^2}{x-\sqrt{x}} = \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$

$$= \frac{-x(x-1)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$= \frac{-x\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$= -\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)$$

D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-x^2}{x-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) = 0$

3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ en remplaçant x par 0 on obtient une forme indéterminée "$\dfrac{0}{0}$"

Levons l'indétermination en éliminant ce zéro qui nous cause problème
Par la méthode du conjugué

Pour $x \neq 4$ on a : $\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \dfrac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$

$$= \frac{(2x+1-9)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-2-2)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$= \frac{(2x-8)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$= \frac{2(x-4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

D'où $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to4}\frac{2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$

$$=\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{8+1}+3\right)}=\frac{4\sqrt{2}}{6}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

4) $\lim_{x\to3^+}\frac{x}{3-x}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ en remplaçant x par 3 on obtient une forme indéterminée

$''\frac{3}{0^-}+\frac{1}{0^+}=(-\infty)+(+\infty)''$

Levons l'indétermination en éliminant ce zéro qui nous cause problème

Pour $x\neq3$ on a : $\frac{x}{3-x}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}=-\frac{x}{x-3}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}$

$$=-\frac{x}{\left(\sqrt{x-3}\right)^2}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{x-3}\right)^2}\left(-x+\sqrt{x-3}\right)$$

D'où $\lim_{x\to3^+}\frac{x}{3-x}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}=\lim_{x\to3^+}\frac{1}{\left(\sqrt{x-3}\right)^2}\left(-x+\sqrt{x-3}\right)$

$=-\infty$ $\left(\text{car }\lim_{x\to3^+}\left(\sqrt{x-3}\right)^2=0^+\text{ et }\lim_{x\to3^+}\left(-x+\sqrt{x-3}\right)=-3\right)$

5) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+7}-5}{x^2-1}$ en remplaçant x par 1 on obtient une forme indéterminée

$''\frac{0}{0}''$; Levons l'indétermination en éliminant ce zéro qui nous cause problème

Par la méthode du conjugué ; mais il faut faire apparaitre un conjugué qui abouti à un simplification

Pour $x \neq 3$ on a :

$$\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+7}-5}{x^2-1}=\frac{\sqrt{x+3}-2+\sqrt{2x+7}-3}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{x+3}-2}{(x-1)(x+1)}+\frac{\sqrt{2x+7}-3}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}+\frac{\left(\sqrt{2x+7}-3\right)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}$$

$$=\frac{(x+3-4)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}+\frac{(2x+7-9)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}$$

$$=\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}+\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}$$

$$=\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}+\frac{2}{(x+1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+7}-5}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}+\frac{2}{(x+1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}\right)$

$$=\left(\frac{1}{(1+1)\left(\sqrt{1+3}+2\right)}+\frac{2}{(1+1)\left(\sqrt{2\times1+7}+3\right)}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2\times4}+\frac{2}{2\times6}\right)$$

$$=\frac{7}{24}$$

6) $\displaystyle\lim_{x\to2^+}(2-x)\sqrt{\frac{x}{x-2}}$ en remplaçant x par 1 on obtient une forme indéterminée $"\frac{0}{0}"$;

Levons l'indétermination en éliminant ce zéro qui nous cause problème

Pour $x \neq 2$ on a : $\displaystyle(2-x)\sqrt{\frac{x}{x-2}}=-(x-2)\sqrt{\frac{x}{x-2}}$

$$=-\left(\sqrt{x-2}\right)^2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$$

$$=-\left(\sqrt{x-2}\right)\sqrt{x}$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to2^+}(2-x)\sqrt{\frac{x}{x-2}}=\lim_{x\to2^+}-\left(\sqrt{x-2}\right)\sqrt{x}=0$

Exercice 2

1) Etudier la continuité en $x_0 = 1$ de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x-1|\sqrt{x^3+1}}{x-1} & si \quad x \neq 1 \\ f(1) = \sqrt{2} \end{cases}$$

Correction exercice 2

1) Pour étudier la continuité de f en $x_0 = 1$; il faut le faire à droite et à gauche en $x_0 = 1$
Car f est définie à droite en $x_0 = 1$ et à gauche en $x_0 = 1$ différemment.

- Pour $x > 1$ on a : $f(x) = \dfrac{|x-1|\sqrt{x^3+1}}{x-1}$

$$= \frac{(x-1)\sqrt{x^3+1}}{x-1}$$

$$= \sqrt{x^3+1}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x^3+1} = \sqrt{2}$

D'où $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

Par suite f est continue à droite en $x_0 = 1$

- Pour $x < 1$ on a : $f(x) = \dfrac{|x-1|\sqrt{x^3+1}}{x-1}$

$$= \frac{-(x-1)\sqrt{x^3+1}}{x-1}$$

$$= -\sqrt{x^3+1}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} -\sqrt{x^3+1} = -\sqrt{2}$

D'où $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq f(1)$

Par suite f n'est continue à gauche en $x_0 = 1$

Exercice 3

1) Etudier la continuité à droite et à gauche en $x_0 = 2$ de la fonction g définie par

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{|x-2|} & si \quad x \in [-2;+\infty[- \{2\} \\ g(2) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Correction exercice 3

1) • Si $x > 2$; on a : $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{|x-2|} = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

Donc $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ en remplaçant x par 2 on obtient une forme indéterminée $"\dfrac{0}{0}"$; Levons l'indétermination en éliminant ce zéro qui nous cause problème par la méthode du conjugué.

On a pour $x \neq 2$: $\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \dfrac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$

$$= \frac{(x+2-4)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$= \frac{(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

D'où $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \dfrac{1}{4}$

Donc $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = g(2)$; et par suite g est continue à droite en $x_0 = 2$

• Si $x < 2$; on a : $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{|x-2|} = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{-(x-2)} = -\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)}$

Donc $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ en remplaçant x par 2 on obtient une forme indéterminée $"\dfrac{0}{0}"$; Levons l'indétermination en éliminant ce zéro qui nous cause problème par la méthode du conjugué.

On a pour $x \neq 2$: $-\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = -\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$

$$= -\frac{(x+2-4)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$= -\frac{(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

D'où $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} -\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = -\frac{1}{4}$

Donc $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) \neq g(2)$; et par suite g n'est pas continue à gauche en $x_0 = 2$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+x}}{x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4-x^3}-x^2\right)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^2}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{x+8}}$
- $\lim\limits_{x\to -2} \frac{3x^3-3x^2-9(x-2)}{-x^3+x-6}$
- $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x}-3}{2x^2-5x-3}$
- $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^3-2x}-\sqrt{4x^2+x-2}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x^2+5x+8}}$

Correction exercice 4

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+x}}{x}$ en remplaçant x par $+\infty$ on obtient une forme indéterminée

Au numérateur du type $''(+\infty)-(+\infty)''$; Levons l'indétermination en factorisant le numérateur par x.

On a : $\frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \frac{x\left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{x}$

$$= \sqrt{3+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{3}-1$

(Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$)

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^3}-x^2\right)$; on a une forme indéterminée du type "$(-\infty)+(+\infty)$"

Pour $x>0$ on a : $\sqrt{x^4-x^3}-x^2=\dfrac{\left(\sqrt{x^4-x^3}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4-x^3}+x^2\right)}{\sqrt{x^4-x^3}+x^2}$

$$=\frac{x^4-x^3-x^4}{\sqrt{x^4-x^3}+x^2}$$

$$=\frac{-x^3}{\sqrt{x^4-x^3}+x^2}$$

$$=\frac{-x^3}{x^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^3}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=-\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$)

• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^2}$ en remplaçant x par 0 on obtient une forme indéterminée "$\dfrac{0}{0}$" ;
Levons l'indétermination en éliminant ce zéro qui nous cause problème

Pour $x\neq 0$ on a : $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^2}=\dfrac{2\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x\right)}{2x^2}$

$$=\frac{2\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}-2x}{2x^2}$$

$$=\frac{-\left(1+x-2\sqrt{1+x}+1\right)-2\sqrt{1-x}+1-x+1}{2x^2}$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2+1-x-2\sqrt{1-x}+1}{2x^2}$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2+\left(\sqrt{1-x}-1\right)^2}{2x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{1-x}-1\right)^2}{x^2}-\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\left(\sqrt{1-x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}\right)^2-\left(\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1-x-1}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}\right)^2-\left(\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{-x}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}\right)^2-\left(\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{-1}{\left(\sqrt{1-x}+1\right)}\right)^2-\left(\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)}\right)^2\right)$$

D'où $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{-1}{\left(\sqrt{1-x}+1\right)}\right)^2-\left(\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)}\right)^2\right)=0$

• $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{x+8}}$ en remplaçant x par 0 on obtient une forme indéterminée $"\frac{0}{0}"$;

Levons l'indétermination en éliminant ce zéro qui nous cause problème en faisant apparaitre le taux de variation de fonction dérivable.

Pour $x\neq 1$ on a : $\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{x+8}}=\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{(x-1)\left(\frac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}\right)}$

$$=-\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{x-1}\times\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}}\right)$$

On considère la fonction $f(x)=\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}$ qui est définie et dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3};5\right[$ donc dérivable en 1 d'où : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{x-1}=f'(1)$ et

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{5-x}}$$

Donc $f'(1)=\frac{3}{2\sqrt{4}}+\frac{1}{2\sqrt{4}}=1$

Donc_$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{x-1}=1$

De même on considère la fonction $g(x)=\sqrt{x+8}-3$ qui est définie et dérivable sur l'intervalle $]-8;+\infty[$ donc dérivable en 1 d'où : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=g'(1)$ et $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+8}}$

Donc $g'(1)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$

Donc $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\frac{1}{6}$

Par suite $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{x+8}}=\lim\limits_{x\to 1}-\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{x-1}\times\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}}\right)$

$$=-1\times\left(\frac{1}{\frac{1}{6}}\right)=-6$$

On peut aussi multiplier par les conjugués du numérateur et dénominateur

$$\frac{\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-x}\right)\left(3+\sqrt{x+8}\right)}{\left(3-\sqrt{x+8}\right)\left(3+\sqrt{x+8}\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-x}\right)}=\frac{3x+1-5+x}{9-x-8}\times\frac{\left(3+\sqrt{x+8}\right)}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-x}\right)}$$

$$=\frac{4x-4}{1-x}\times\frac{\left(3+\sqrt{x+8}\right)}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-x}\right)}$$

$$=-4\times\frac{\left(3+\sqrt{x+8}\right)}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-x}\right)}$$

D'où $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{x+8}}=\lim\limits_{x\to 1}-4\times\frac{\left(3+\sqrt{x+8}\right)}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-x}\right)}=-6$

• $\lim_{x\to -2}\dfrac{3x^3-3x^2-9(x-2)}{-x^3+x-6}$ en remplaçant x par 2 on obtient une forme indéterminée "$\frac{0}{0}$"

Levons l'indétermination en éliminant ce zéro qui nous cause problème en factorisant par $(x+2)$.

Comme le polynôme $3x^3-3x^2-9(x-2)$ s'annule en $x_0=-2$ donc il est factorisable par $(x+2)$ et on a en effectuons une division euclidienne de $3x^3-3x^2-9(x-2)$ par $(x+2)$; $3x^3-3x^2-9(x-2)=(x+2)(3x^2-9x+9)$

De même on $-x^3+x-6=-(x+2)(x^2-2x+3)$

$$\text{D'où } \lim_{x\to -2}\frac{3x^3-3x^2-9(x-2)}{-x^3+x-6}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(3x^2-9x+9)}{-(x+2)(x^2-2x+3)}$$

$$=\lim_{x\to -2}-\frac{3x^2-9x+9}{x^2-2x+3}=-\frac{39}{11}$$

• $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x}-3}{2x^2-5x-3}$ en remplaçant x par 3 on obtient une forme indéterminée "$\frac{0}{0}$" ;

Levons l'indétermination en éliminant ce zéro qui nous cause problème en multipliant le numérateur par son conjugué et en factorisant le par $(x-3)$.

$$\text{Pour } x\neq 1 \text{ on a : } \frac{\sqrt{3x}-3}{2x^2-5x-3}=\frac{(\sqrt{3x}-3)(\sqrt{3x}+3)}{(x-3)(2x+1)(\sqrt{3x}+3)}$$

$$=\frac{(3x-9)}{(x-3)(2x+1)(\sqrt{3x}+3)}$$

$$=\frac{3(x-3)}{(x-3)(2x+1)(\sqrt{3x}+3)}$$

$$=\frac{3}{(2x+1)(\sqrt{3x}+3)}$$

$$\text{D'où } \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x}-3}{2x^2-5x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3}{(2x+1)(\sqrt{3x}+3)}=\frac{1}{14}$$

• $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^3-2x}-\sqrt{4x^2+x-2}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x^2+5x+8}}$ en remplaçant x par -1 on obtient une forme indéterminée "$\dfrac{0}{0}$" ; *Levons l'indétermination en éliminant ce zéro qui nous cause problème en faisant apparaitre le taux de variation de fonction dérivable.*

Pour $x\neq -1$ *on a :* $\dfrac{\sqrt{x^3-2x}-\sqrt{4x^2+x-2}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x^2+5x+8}}=\dfrac{\left(\sqrt{x^3-2x}-\sqrt{4x^2+x-2}\right)}{(x+1)\left(\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x^2+5x+8}}{x+1}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{x^3-2x}-\sqrt{4x^2+x-2}}{x+1}\times\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x^2+5x+8}}{x+1}}$$

On considère la fonction $f(x)=\sqrt{x^3-2x}-\sqrt{4x^2+x-2}$ qui est définie et dérivable sur l'intervalle $]-1,2;-0,8[$ donc dérivable en -1 d'où : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^3-2x}-\sqrt{4x^2+x-2}}{x+1}=f'(-1)$

et $f'(x)=\dfrac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x}}-\dfrac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x-2x}}$

Donc $f'(-1)=\dfrac{3-2}{2\sqrt{-1+2}}-\dfrac{-8+1}{2\sqrt{4-1+2}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2\sqrt{5}}$

$$=\frac{\sqrt{5}+7}{2\sqrt{5}}$$

Donc $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^3-2x}-\sqrt{4x^2+x-2}}{x+1}=\dfrac{\sqrt{5}+7}{2\sqrt{5}}$

De même on considère la fonction $g(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt{x^2+5x+8}$ qui est définie et dérivable sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ donc dérivable en -1 d'où :

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x^2+5x+8}}{x+1}=g'(-1)$ et $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}-\dfrac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x+8}}$

Donc $g'(-1)=\dfrac{1}{2\sqrt{-1+5}}-\dfrac{-2+5}{2\sqrt{1-5+8}}$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$$

Donc $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x^2+5x+8}}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$

Par suite $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^3-2x}-\sqrt{4x^2+x-2}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x^2+5x+8}} = \dfrac{\sqrt{5}+7}{2\sqrt{5}} \times \dfrac{1}{-\frac{1}{2}}$

$$= -\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}} = -\frac{5+7\sqrt{5}}{5}$$

Exercice 5

Étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 1$ dans les cas suivants :

$$\bullet f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4(x^2+x-2)}{3\sqrt{1-x}} & si\ x<1 \\ \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & si\ x>1 \\ 0 & si\ x=1 \end{cases}$$

$$\bullet f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1} & si\ x>1 \\ \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1} & si\ x<1 \\ 2 & si\ x=1 \end{cases}$$

Correction exercice 5

$$\bullet f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4(x^2+x-2)}{3\sqrt{1-x}} & si\ x<1 \\ \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & si\ x>1 \\ 0 & si\ x=1 \end{cases}$$

* Calculons $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

Pour $x \neq 1$ on a : $\dfrac{-4(x^2+x-2)}{3\sqrt{1-x}} = \dfrac{-4(x-1)(x+2)}{3\sqrt{1-x}}$

$$= \frac{4(1-x)(x+2)}{3\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{4\sqrt{1-x}(x+2)}{3}$$

D'où $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-4(x^2+x-2)}{3\sqrt{1-x}}$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{4\sqrt{1-x}(x+2)}{3} = 0$$

* Calculons $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Pour $x \neq 1$ on a : $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= (\sqrt{x}+1)(x+1)$$

D'où $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (\sqrt{x}+1)(x+1) = 4$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{4\sqrt{1-x}\,(x+2)}{3} = 0$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; par suite f n'est pas continue en 1 mais elle est continue à gauche en 1.

$$\bullet f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1} & \text{si } x>1 \\ \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1} & \text{si } x<1 \\ 2 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

* Calculons $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

La fonction $h(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ est définie et dérivable en 1 et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = h'(1)$$

Et $h'(x) = -\dfrac{\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ d'où $h'(1) = -\dfrac{\pi}{2}$

D'où $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\dfrac{\pi}{2} \neq f(x)$; par suite f n'est pas continue à gauche en 1

* Calculons $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

La fonction $h(x) = \sin(x^2-1)$ est définie et dérivable en 1 et

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1)$$

Et $h'(x) = 2x\cos(x^2 - 1)$ d'où $h'(1) = 2$

D'où $\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(2)$; par suite f est pas continue à droite en 1 mais elle n'est pas continue en 1 car $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{x - 3}{\sqrt{x+6} - 3} & \text{si } x > 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue en 3?

Correction exercice 6

* Calculons $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

Pour $x \neq 3$ on a : $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}$

$= (x+3)$

D'où $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x+3) = 6$; par suite f est continue à gauche en 3

* Calculons $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

Pour $x \neq 3$ on a : $\dfrac{x - 3}{\sqrt{x+6} - 3} = \dfrac{(x-3)\left(\sqrt{x+6} + 3\right)}{\left(\sqrt{x+6} - 3\right)\left(\sqrt{x+6} + 3\right)}$

$$= \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x+6-9)}$$
$$= \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x-3)}$$
$$= \sqrt{x+6}+3$$

D'où $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{x+6}+3 = 6$; par suite f est continue à droite en 3

Donc $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$; par suite f est continue en 3 .

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x+\sqrt{x^2+1} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{2-2\cos(x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Étudier la continuité de f en 0.

2) Montrer que pour tout $x > 0$; $0 \le f(x) \le \frac{4}{x^2}$; en déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Correction exercice 7

1) On a f continue à gauche en 0 comme somme de fonction continues à gauche en 0

Etudions la continuité de f à droite en 0 ; et $f(0)=1$.

Pour $x \neq 0$ on a : $\frac{2-2\cos(x)}{x^2} = 2\times\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ et $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

D'où $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$; Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$; alors f est continue à droite en 0

Par suite f est continue en 0

2) Montrons que pour tout $x>0$; $0 \leq f(x) \leq \frac{4}{x^2}$

Pour tout $x>0$: on a : $f(x)=\frac{2-2\cos(x)}{x^2}$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2\cos(x) \leq 2$

$$\Rightarrow 0 \leq 2-2\cos(x) \leq 4$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{2-2\cos(x)}{x^2} \leq \frac{4}{x^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{4}{x^2}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x^2}=0$; alors d'après le théorème de l'encadrement on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

3) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+1}$; on a une forme indéterminée du type"$(-\infty)+(+\infty)$"

Pour enlever l'indétermination on multiplie d'abord par le conjugué et on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x^2-1}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}=0$$

Un bon résultat est le fruit d'un travail intelligent et rigoureux