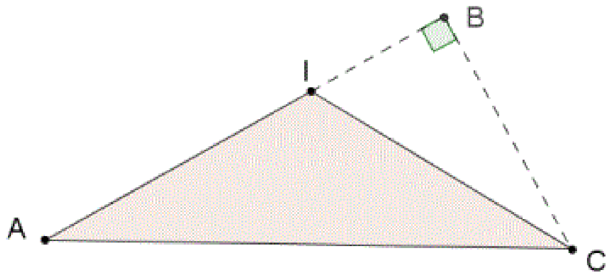
EXERCICE 1

Soit AIC un triangle isocèle en I tel que $IA = a$, et $\widehat{AIC} = \frac{2\pi}{3}$.

B est le projeté orthogonal de C sur (AI).



1) $a/$ Montrer que $AC^2 = IA^2 + IC^2 - 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$.

   $b/$ Calculer alors AC en fonction de a.

   $c/$ Calculer, en fonction de a, les distances BI et BC.

2) Soit D le point tel que $ABCD$ est un rectangle.

   $a/$ Montrer que $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CB} = \frac{3a^2}{4}$.

   $b/$ Montrer que $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CB}$, en déduire que $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CD} = \frac{3a^2}{4}$.

   $c/$ Montrer que les droites (CI) et (BD) sont perpendiculaires.

3) Soit l'ensemble $\Delta = \{M \in P \textit{ tels que } MA^2 - MI^2 = 2a^2\}$.

   $a/$ Vérifier que $C \in \Delta$.

   $b/$ Soit O le milieu de $[AI]$, montrer que, pour tout point M du plan, on a : $MA^2 - MI^2 = 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AI}$.

   $c/$ Montrer que Δ est une droite que l'on précisera.

4) Soit l'ensemble $\Gamma = \left\{M \in P \textit{ tels que } MA^2 + 2MB^2 = \frac{9a^2}{2}\right\}$.

   $a/$ Vérifier que $C \in \Gamma$.

   $b/$ Vérifier que I est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;2)$.

   $c/$ Montrer que, pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + 2MB^2 = 3MI^2 + \frac{3a^2}{2}.$$

   $d/$ Montrer que Γ est un cercle que l'on précisera.

EXERCICE 2

A) Soit ABC un triangle rectangle en B tels que : $AB = 5$ et $BC = 2$.
E un point du $[AB]$ tel que $AE = 3$, D le projeté orthogonal de E sur (AC) et $F = S_B(C)$.

1) Calculer $\overrightarrow{AE}\,.\,\overrightarrow{AC}$ puis déduire AD .

2) a) Calculer $\overrightarrow{AF}\,.\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}\,.\,\overrightarrow{BC}$ puis déduire que $\overrightarrow{AF}\,.\,\overrightarrow{AC} = 21$.

b) Déterminer alors la valeur du $\cos(\widehat{CAF})$.

B) On pose : $\Delta = \{ M \in P \text{ tels que : } 2\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{CA} \}$

$\mathscr{C} = \{ M \in P \text{ tels que : } 2\,MA^2 + 3\,MB^2 = 50 \}$

1) Vérifier que E est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 3)$.

2) Montrer que Δ est une droite que l'on précisera .

3) a) Montrer que pour tout $M \in P$; $2MA^2 + 3\,MB^2 = 5ME^2 + 30$.

b) Déduire alors la nature de $\mathscr{C}$ et ses caractéristiques .

C) Soit $\mathbf{R}\left(B ; \frac{\overrightarrow{BA}}{5} ; \frac{\overrightarrow{BC}}{2}\right)$ un repère orthonormé du plan .

1) Déterminer les coordonnées de A , C et E dans le repère $\mathbf{R}$.

2) Ecrire une équation cartésienne de chacun des ensembles Δ et $\mathscr{C}$.

EXERCICE 3

Etant donné un quadrilatère $ABCD$. On se propose de déterminer l'ensemble Δ des points M du plan vérifiant la propriété:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$.

On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

1) Montrer l'équivalence:

$$(M \in \Delta) \text{ si, et seulement si } (MI^2 - MJ^2 = AI^2 - BJ^2).$$

2) En déduire l'ensemble Δ dans chacun des sas suivants :

$a/$ $ABCD$ est un rectangle.

$b/$ $ABCD$ est un parallélogramme non rectangle.

3) Dans cette question, $ABCD$ n'est pas un parallélogramme, soit O le milieu de $[IJ]$.

$a/$ Montrer que, pour tout point M du plan, on a :

$MI^2 - MJ^2 = 2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OH}$, où H est le projeté orthogonal de M sur (IJ).

$b/$ On pose $k = AI^2 - BJ^2$, déduire de ce qui précède que :

($M \in \Delta$) si, et seulement si ($OH = \dfrac{|k|}{2IJ}$).

$c/$ Montrer alors que Δ est une droite perpendiculaire à (IJ).

4) $ABCD$ est toujours n'est pas un parallélogramme, et on suppose en outre que les sommets A, B, C et D sont situés sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon R et que (AC) et (BD) se coupent en E.

$a/$ Montrer que : $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EA'}$, où A' est le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$.

$b/$ En déduire que : $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC} = \Omega E^2 - R^2$.

$c/$ Montrer que : $E \in \Delta$, puis construire Δ.