

Exercice 1

Partie I

1. Soit $(x; y) \in G^2$; on pose : $\alpha = (x-1)(y-1)$ et $\beta = (x-2)(y-2)$

$$\text{On a : } \begin{cases} x \in G \\ y \in G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ 1 < y < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(y-1) > 0 \\ (x-2)(y-2) > 0 \end{cases}$$

Donc : $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

$$\text{D'où : } \blacktriangleright \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} - 1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} > 0$$

$$\text{Donc : } \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} > 1$$

$$\blacktriangleright \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} - 2 = \frac{-\beta}{\alpha + \beta} < 0$$

$$\text{Donc : } \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} < 2$$

D'où : $1 < x * y < 2$ et $x * y \in G$.

Par suite : $*$ est une loi de composition interne sur G .

$$\mathbb{R}_+^* \rightarrow G$$

$$2) f: x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$$

a) Soit $(x; y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ on a :

$$\begin{aligned} f(x) * f(y) &= \frac{x+2}{x+1} * \frac{y+2}{y+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) * \left(1 + \frac{1}{y+1}\right) \\ &= \frac{2\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - 1\right)\left(\frac{1}{y+1} - 1\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - 1\right)\left(\frac{1}{y+1} - 1\right)} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{(-x)(-y)}{(x+1)(y+1)}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{(-x)(-y)}{(x+1)(y+1)}} \\ &= \frac{xy+2}{xy+1} \\ &= f(x \times y) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \left(\forall (x; y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \right); \boxed{f(x) * f(y) = f(x \times y)}$$

Donc : f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*; \times)$ vers $(G; *)$

Montrons que f est bijective de $(\mathbb{R}_+^*; \times)$ vers $(G; *)$.

Soit $y \in G$; résolvons l'équation $y = f(x)$

$$\text{On a : } y = \frac{x+2}{x+1} \Leftrightarrow x+2 = xy+y$$

$$\Leftrightarrow x(1-y) = y-2 \quad (y \in G \text{ Donc } y \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-2}{1-y}$$

$$\text{D'où } x = \frac{y-2}{1-y} \text{ et } y \in G \text{ alors } 1 < y < 2 \Rightarrow \frac{y-2}{1-y} > 0 ; \text{ donc : } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Par suite : $(\forall y \in G)(\exists ! x \in \mathbb{R}_+^*) / y = f(x)$

Donc f est une bijection de $(\mathbb{R}_+^*; \times)$ vers $(G; *)$.

On Conclut que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*; \times)$ vers $(G; *)$.

b) Comme f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*; \times)$ vers $(G; *)$ et que $(\mathbb{R}_+^*; \times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre 1 ; alors $(G; *)$ est un groupe commutatif

d'élément neutre $f(1) = \frac{3}{2}$

$$\text{II- 1) a) on a : } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc : $A^3 = O$

On déduit que : $A \neq O$ et $A^2 \neq O$

De plus $A \times A^2 = A^2 \times A = O$ donc la matrice A est un diviseur de O dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}); +; \times)$.

b) On a :

$$(A^2 - A + I) \times (A + I) = A^3 - A^2 + A + A^2 - A + I$$

(car $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans $M_3(\mathbb{R})$)

$$(A^2 - A + I) \times (A + I) = A^3 + I$$

$$= I \quad (\text{car } A^3 = O)$$

$$(A^2 - A + I) \times (A + I) = (A + I) \times (A^2 - A + I) = I$$

Par suite $(A + I)$ est inversible dans $M_3(\mathbb{R})$ et son inverse est :

$$\begin{aligned}
 (A^2 - A + I) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

D'où l'inverse de $(A+I)$ est : $(A^2 - A + I) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Soit $E = \{M(\alpha; b) / (\alpha; b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $M(\alpha; b) = \alpha I + bA$

On a : •) $O \in E$ (car $O = 0 \cdot I + 0 \cdot A$) et $E \subset M_3(\mathbb{R})$.

•) Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $M(\alpha; b) \in E$

$$\begin{aligned}
 \alpha M(\alpha'; b') + \beta M(\alpha; b) &= \alpha(\alpha' I + b' A) + \beta(\alpha I + b A) \\
 &= (\alpha \alpha' + \beta \alpha) I + (\alpha b' + \beta b) A \\
 &= M(\alpha \alpha' + \beta \alpha; \alpha b' + \beta b)
 \end{aligned}$$

donc $(\alpha M(\alpha'; b') + \beta M(\alpha; b)) \in E$ (Car $(\alpha \alpha' + \beta \alpha; \alpha b' + \beta b) \in \mathbb{R}^2$)

D'où $(E; +; \cdot)$ est un sous espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R}); +; \cdot)$.

Par suite $(E; +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

De plus tout élément $M(\alpha; b) \in E$ s'écrit : $M(\alpha; b) = \alpha I + bA$ avec $(\alpha; b) \in \mathbb{R}^2$

Donc $(I; A)$ est une famille génératrice de E .

De plus, on a pour tout $(\alpha; b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
 \alpha I + bA = O &\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 3b & 2b \\ 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ et } b = 0
 \end{aligned}$$

Donc $(I; A)$ est une famille libre.

Conclusion

$(I; A)$ est une base de l'espace vectoriel $(E; +; \cdot)$.

Exercice 2

Partie I.

Urne : ► 3 boules Rouges ; 4 boules Noirs

On tire successivement avec remise 4 boules, donc : $\text{Card} \Omega = 7^4$

X : "Nombre de boules Noires tirée"

1) 1er Méthode

-) $P(X=0) = \frac{3^4}{7^4} = \frac{81}{2401}$
-) $P(X=1) = \frac{4^1 \times C_4^1 \times 3^3}{7^4} = \frac{432}{2401}$
-) $P(X=2) = \frac{4^2 \times C_4^2 \times 3^2}{7^4} = \frac{864}{2401}$
-) $P(X=3) = \frac{4^3 \times C_4^3 \times 3^1}{7^4} = \frac{768}{2401}$
-) $P(X=4) = \frac{4^4}{7^4} = \frac{256}{2401}$

D'où la loi de Probabilité de la variable X est donné par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{81}{2401}$	$\frac{432}{2401}$	$\frac{864}{2401}$	$\frac{768}{2401}$	$\frac{256}{2401}$

On vérifie bien que : $\sum_{i=0}^4 P(X=x_i) = 1$

2ème Méthode

Soit A l'évènement «Obtenir une boule Noire » ; $P(A) = \frac{4}{7}$

On tire 4 boules successivement avec remise et X est la variable aléatoire liée à la réalisation de l'évènement A donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p = \frac{4}{7}$

D'où : $P(X=k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

-) $P(X=0) = C_4^0 \left(\frac{4}{7}\right)^0 \left(1-\frac{4}{7}\right)^4$
 $= \left(\frac{3}{7}\right)^4$
 $= \frac{81}{2401}$
-) $P(X=1) = C_4^1 \left(\frac{4}{7}\right)^1 \left(1-\frac{4}{7}\right)^3$
 $= 4 \times \frac{4}{7} \times \left(\frac{3}{7}\right)^3$
 $= \frac{432}{2401}$
-) $P(X=2) = C_4^2 \left(\frac{4}{7}\right)^2 \left(1-\frac{4}{7}\right)^2$
 $= 6 \times \left(\frac{4}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{864}{2401}$
-) $P(X=3) = C_4^3 \left(\frac{4}{7}\right)^3 \left(1-\frac{4}{7}\right)^1$

$$= 4 \times \left(\frac{4}{7}\right)^3 \times \left(\frac{3}{7}\right)$$

$$= \frac{768}{2401}$$

$$\bullet) P(X=4) = C_4^4 \left(\frac{4}{7}\right)^4 \left(1 - \frac{4}{7}\right)^0$$

$$= \left(\frac{4}{7}\right)^4$$

$$= \frac{256}{2401}$$

2) X suit une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=\frac{4}{7}$; donc : $E(X) = n \times p = \frac{16}{7}$

Parte II

$$1) P(N) = \frac{4}{7} ; P_N(E) = \frac{A_9^3}{A_{12}^3} = \frac{504}{1320}$$

$$\bullet P(E \cap N) = P_N(E) \times P(N)$$

$$\text{D'où : } P(E \cap N) = \frac{12}{55}$$

$$2) P(R) = \frac{3}{7} ; P_R(E) = \frac{A_4^3}{A_{12}^3} = \frac{24}{1320}$$

$$\bullet P(E \cap R) = P_R(E) \times P(R)$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{24}{1320}$$

$$= \frac{72}{9240}$$

$$\text{donc : } P(E) = P(E \cap N) + P(E \cap R)$$

$$= \frac{2016}{9240} + \frac{72}{9240}$$

$$= \frac{87}{385}$$

$$\text{D'où : } P(E) = \frac{87}{385}$$

$$3) \text{ On a : } P_E(R) = \frac{P(E \cap R)}{P(E)}$$

$$\text{Donc : } P_E(R) = \frac{1}{29}$$

Exercice 3

$$I- (E): 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

1) Calculons le discriminant de l'équation (E),

$$\Delta = (-2(a-1))^2 - 4 \times 2 \times (a-1)^2$$

$$= 4(a-1)^2(1-2)$$

$$= (2i(a-1))^2$$

Donc les solutions de (E) sont les nombres complexes

$$\blacktriangleright z_1 = \frac{2(a-1) + 2i(a-1)}{4}$$

$$= \frac{(a-1)}{2} (1+i)$$

$$\blacktriangleright z_2 = \frac{2(a-1) - 2i(a-1)}{4}$$

$$= \frac{(a-1)}{2} (1-i)$$

2) Soit $a = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

a) On a : $a-1 = e^{i\theta} - 1$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)$$

$$= 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$$

Donc : $a-1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

b) $0 < \theta < \pi$; alors $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$

Alors : $\bullet) z_1 = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}}{2} (1+i)$

$$= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+3\pi}{2+4}\right)}$$

Donc : $z_1 = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) \right)$

$$\bullet) z_2 = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}}{2} (1-i)$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\text{Donc : } z_2 = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

II- $\operatorname{Re}(a) < 0$; les points $A(a)$; $B(-i)$; $C(i)$ et $B'(1)$.

1) •) J milieu de $[AC] \Rightarrow z_j = \frac{a+i}{2}$

•) K milieu de $[AB] \Rightarrow z_k = \frac{a-i}{2}$

2) $r_1\left(J; \frac{\pi}{2}\right)$ et $r_2\left(K; \frac{\pi}{2}\right)$

Soient $C'(c')$ et $A'(a')$.

On a : •) $A' = r_2(A) \Leftrightarrow (a' - z_k) = (a - z_k) e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow \left(a' - \frac{a-i}{2}\right) = \left(a - \frac{a-i}{2}\right) i$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{a+i}{2} \times i + \frac{a-i}{2}$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{ai - 1 + a - i}{2}$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{(a-1)(1+i)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a' = z_1}$$

•) $C' = r_1(C) \Leftrightarrow (c' - z_j) = (c - z_j) e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow \left(c' - \frac{a+i}{2}\right) = \left(i - \frac{a+i}{2}\right) i$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{i-a}{2} \times i + \frac{a+i}{2}$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{-1 - ai + a + i}{2}$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c' = z_2}$$

3) Calculons : $\frac{a' - c'}{a - 1}$

On a : $\frac{a' - c'}{a - 1} = \frac{z_1 - z_2}{a - 1}$

$$= \frac{\frac{(a-1)(1+i)}{2} - \frac{(a-1)(1-i)}{2}}{a-1}$$

$$= \frac{(a-1)}{2(a-1)} (1+i-1+i)$$

$$= \frac{1}{2}(2i)$$

Donc : $\boxed{\frac{a' - c'}{a - 1} = i}$

Alors : $\frac{a' - c'}{a - 1} = i \Rightarrow \arg\left(\frac{a' - c'}{a - 1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
 $\Rightarrow (\overrightarrow{B'A}; \overrightarrow{C'A'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc (AB') est perpendiculaire à $(C'A')$

Alors la droite (AB') est une hauteur du triangle $A'B'C'$.

Exercice 4

1) $f: \begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

a) On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+(x \ln x)^2}}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ (car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$)

Comme $f(0) = 1$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

D'où : f est continue à droite en 0.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x}}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x)^2 = +\infty$)

b) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x}} - 1}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1+x^2 \ln^2 x}}{x \sqrt{1+x^2 \ln^2 x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \sqrt{1+x^2 \ln^2 x})(1 + \sqrt{1+x^2 \ln^2 x})}{x \sqrt{1+x^2 \ln^2 x} (1 + \sqrt{1+x^2 \ln^2 x})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - 1 - x^2 \ln^2 x)}{x \sqrt{1+x^2 \ln^2 x} (1 + \sqrt{1+x^2 \ln^2 x})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \ln^2 x}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x} (1 + \sqrt{1+x^2 \ln^2 x})}$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = 0)$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

c) La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto 1 + x^2 \ln^2 x$ est dérivable et strictement positive sur $]0; +\infty[$; donc la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + x^2 \ln^2 x}$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$; par suite f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2 \ln^2 x}} \right)' \\ &= \left((1 + x^2 \ln^2 x)^{-\frac{1}{2}} \right)' \\ &= -\frac{1}{2} (1 + x^2 \ln^2 x)' (1 + x^2 \ln^2 x)^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= -\frac{1}{2} \left(2x \ln^2 x + 2x^2 \times \frac{1}{x} \ln x \right) (1 + x^2 \ln^2 x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + x^2 \ln^2 x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + x^2 \ln^2 x)^{\frac{3}{2}}}$

d) Etudions de signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$

Donc le signe de $f'(x)$ est le signe contraire de $\ln x (1 + \ln x)$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$(1 + \ln x)$	-	0	+	+
$\ln x$	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	-

D'où le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	0		1	0

$\frac{1}{\sqrt{1 + e^2}}$

$$2) (\forall x \in [0; +\infty[) ; F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

a) On a pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x \ln x} &= \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \\ &= \frac{(\ln x)'}{\ln x} \end{aligned}$$

Donc la fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ sur l'intervalle $[e; +\infty[$ qui s'annule en e .

b) pour tout $t \in [e; +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} \bullet) t^2 \ln^2 t \leq 1 + t^2 \ln^2 t &\Leftrightarrow t \ln t \leq \sqrt{1 + t^2 \ln^2 t} \\ \bullet) e \leq t &\Rightarrow 1 \leq \ln t \text{ et } e \leq t \ln t \\ &\Rightarrow 1 \leq t \ln t \\ &\Rightarrow 1 \leq t^2 \ln^2 t \\ &\Rightarrow 1 + t^2 \ln^2 t \leq 2t^2 \ln^2 t \\ &\Rightarrow \sqrt{1 + t^2 \ln^2 t} \leq \sqrt{2} t \ln t \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } (\forall t \in [e; +\infty[) ; \boxed{t \ln t \leq \sqrt{1 + t^2 \ln^2 t} \leq \sqrt{2} t \ln t}$$

c) d'après la question précédente pour tout $t \geq e$ on a : $0 < t \ln t \leq \sqrt{1 + t^2 \ln^2 t} \leq \sqrt{2} t \ln t$

$$\text{Donc : } \frac{1}{\sqrt{2} t \ln t} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} \leq \frac{1}{t \ln t}$$

Alors , pour tout $x \geq e$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_e^x \frac{1}{t \ln t} dt \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt \leq \int_e^x \frac{1}{t \ln t} dt$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \frac{1}{\sqrt{2}} [\ln(\ln t)]_e^x &\leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt \leq [\ln(\ln t)]_e^x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt \leq \ln(\ln x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \geq e) ; \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt \leq \ln(\ln x)}$$

$$\text{d) on a pour tout } x \geq e ; \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt \leq \ln(\ln x)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) + \int_0^e \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt &\leq \int_0^e \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt + \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt \leq \ln(\ln x) + \int_0^e \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) + F(e) \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt \leq \ln(\ln x) + F(e) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) + F(e) \leq F(x) \leq \ln(\ln x) + F(e) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) + F(e) \right) = +\infty$

Alors : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty}$

De plus on a : $(\forall x \geq e) ; \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln(\ln x)}{x} + \frac{F(e)}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{\ln(\ln x)}{x} + \frac{F(e)}{x}$

et $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln t}{t} \times \frac{t}{e^t} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{F(e)}{x} \right) = 0 \end{cases}$

(on pose $\ln x = t$ alors $x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln t}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right) = 0$)

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln(\ln x)}{x} + \frac{F(e)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x} + \frac{F(e)}{x} \right) = 0$

D'où : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0}$

e) Calculons $F''(x)$

F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$

$F'(x) = f(x)$ sur $[0; +\infty[$.

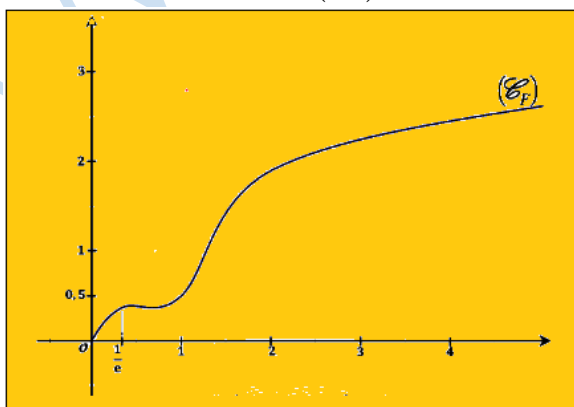
Comme f est une fonction dérivable sur $[0; +\infty[$ alors F' est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \in [0; +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} F''(x) &= f'(x) \\ &= \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + x^2 \ln^2 x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Donc d'après la question 1) d)

$F''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \frac{1}{e}$ et F'' s'annule et change de signe en $x = 1$ et $x = \frac{1}{e}$ donc les points d'abscisses $x = 1$ et $x = \frac{1}{e}$ sont deux points d'inflexion pour (C_F) .

f) Construction de (C_F)



3) $(\forall x \in [0; +\infty[) ; \varphi(x) = x - F(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - F(x)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{F(x)}{x} \right) \\
 &= +\infty \\
 (\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} &= 0)
 \end{aligned}$$

• D'après la question 1- d) (Tableau de variations de f)

On a : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; 0 \leq f(x) \leq 1$ et $\varphi'(x) = 1 - f(x)$

D'où : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; \varphi'(x) \geq 0$

Donc φ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

b) φ est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

$$\text{Et } \varphi([0; +\infty[) = [\varphi(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)] = [0; +\infty[$$

Comme $n \in [0; +\infty[$; d'où : $(\exists ! \alpha_n \in [0; +\infty[) / \varphi(\alpha_n) = n$.

Càd que l'équation $\varphi(x) = n$ admet une unique solution α_n dans $[0; +\infty[$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $\varphi(\alpha_n) = n \Rightarrow \alpha_n - F(\alpha_n) = n$

(or $F(\alpha_n) \geq 0$ (car $F(t) \geq 0$ Pour tout $t \in [0; +\infty[$)

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_n \geq n$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$

4) a) F est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$ comme $1 \leq n \leq \alpha_n$ alors $[n; \alpha_n] \subset [0; +\infty[$

Par suite F est continue sur $[n; \alpha_n]$ et dérivable sur $]n; \alpha_n[$ et d'après le théorème des accroissements finis : $(\exists c \in]n; \alpha_n[) / F(\alpha_n) - F(n) = (\alpha_n - n)F'(c)$

D'où : $(\exists c \in]n; \alpha_n[) / F(\alpha_n) - F(n) = (\alpha_n - n)f(c)$

Donc : $(\exists c \in]n; \alpha_n[) / F(\alpha_n) = F(n) + (\alpha_n - n)f(c)$

On a : $1 \leq n < c < \alpha_n$ et f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$; alors : $f(\alpha_n) < f(c) < f(n)$

et $\alpha_n - n > 0$ d'où : $(\alpha_n - n)f(c) < (\alpha_n - n)f(n)$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; F(\alpha_n) \leq F(n) + (\alpha_n - n)f(n)$

•) $\alpha_n > n > 0$ Donc : $0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{\alpha_n} + \left(1 - \frac{n}{\alpha_n}\right)f(n)$

On a : $0 < \frac{1}{\alpha_n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{F(n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n}$ et $\left(1 - \frac{n}{\alpha_n}\right)f(n) \leq f(n)$ (car $\left(1 - \frac{n}{\alpha_n}\right) \leq 1$)

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$

b) On a : $(\forall n \geq 1) ; \varphi(\alpha_n) = n$; donc : $F(\alpha_n) = \alpha_n - n$

Soit : $\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = 1 - \frac{n}{\alpha_n}$ et on a : $0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$

Donc : $0 \leq 1 - \frac{n}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n) \Rightarrow 1 - \frac{F(n)}{n} - f(n) \leq \frac{n}{\alpha_n} \leq 1$

Et d'après la question (2-d)) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(n)}{n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$

Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{F(n)}{n} - f(n) \right) = 1$

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\alpha_n} = 1$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1$

Exercice 5.

$u_n = \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2}$ et $v_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \geq 1$.

1- pour tout $n \geq 1$; on a : $v_n = \ln(u_n)$

$$\begin{aligned} &= \ln \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2} \\ &= n^2 \ln \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right) \\ &= n^2 (\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))) \end{aligned}$$

D'où : $(\forall n \geq 1) ; v_n = n^2 (\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)))$.

2) Considérons la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(\arctan(x))$

f est continue sur $]0; +\infty[$ (car $x \mapsto \arctan(x)$ est continue et strictement positive sur $]0; +\infty[$)

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ (car $x \mapsto \arctan(x)$ est dérivable et strictement positive sur $]0; +\infty[$)

Alors f est continue sur $[n; n+1]$ et dérivable sur $]n; n+1[$

Et d'après le théorème des Accroissements finis à l'intervalle ; on a :

$$(\exists c \in]n; n+1[) / f(n+1) - f(n) = (n+1 - n)f'(c)$$

Donc : $(\exists c \in]n; n+1[) / f(n+1) - f(n) = f'(c)$

$$\begin{aligned} \text{de plus : } (\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) &= \frac{(\arctan(x))'}{\arctan(x)} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)\arctan(x)} \end{aligned}$$

D'où : $(\exists c \in]n; n+1[) / f(n+1) - f(n) = \frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)}$

$$\Rightarrow \ln(\arctan(n+1)) - \ln(\arctan(n)) = \frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

$$\Rightarrow n^2 (\ln(\arctan(n+1)) - \ln(\arctan(n))) = \frac{n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

Donc : $(\forall n \geq 1) ; (\exists c \in]n; n+1[) / v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

3) On a : $n < c < n+1 \Rightarrow \begin{cases} n^2 < c^2 < (n+1)^2 \\ \arctan(n) < \arctan(c) < \arctan(n+1) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1+(n+1)^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+n^2} \\ \frac{1}{\arctan(n+1)} < \frac{1}{\arctan(c)} < \frac{1}{\arctan(n)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)} < \frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)} < \frac{1}{(1+n^2)\arctan(n)}$$

$$\Rightarrow \frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$$

Donc : $(\forall n \geq 1) ; \frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$

4) On a : •) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\arctan(n)} = 0$

(car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$)

•) De même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)} = 0$.

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et comme pour tout $n \geq 1 ; v_n = \ln(u_n) \Rightarrow u_n = e^{v_n}$

La fonction exp est continue en 0 ; alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^0 = 1$