Devoir surveillé n°3 1er Semestre *2éme Bac SM*

Exercice 1 *(7 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos(\pi x)}{\pi^2x^2}-x & si \quad x>0 \\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x-\dfrac{1}{2} & si \; x\leq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que $\forall x>0 \; ; \; -x\leq f(x)\leq -x+\dfrac{2}{\pi^2x^2}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *puis* $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(\tan x)$

2) a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right)$

3) a) Montrer que la droite d'équation $y=2x-1$ *est une asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de* $-\infty$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to0^-} xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ *admet au moins une solution* α *dans* $\left]\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right[$

b) Montrer que $\sin(\pi\alpha)=\pi\alpha\sqrt{2\alpha-\pi^2\alpha^4}$

Exercice 2 *(6 points)*

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *'équation* $(E): z^2-2z+2=0$

b) Mettre les solutions de (E) *sous forme exponentielle*

2) Pour tout réel θ *de l'intervalle* $]0;\pi[$*, on considère l'équation*
$(E_\theta): z^2-2z-2i\sin(\theta).e^{i\theta}=0$

a) Vérifier que $e^{i2\theta}-1=2i\sin(\theta).e^{i\theta}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* (E_θ)

3) Le plan complexe (P) *est rapporté à un repère orthonormé direct* $(O;\vec{u},\vec{v})$

On désigne par M_0 *,* M_1 *et* M_2 *les points d'affixes respectives* $z_0=2$ *,* $z_1=1-e^{i\theta}$ *et* $z_2=1+e^{i\theta}$

a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle

b) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\overrightarrow{M_0M_2}$ sont orthogonaux

c) Montrer que $OM_1M_0M_2$ est un rectangle

d) Déterminer θ pour que $OM_1M_0M_2$ soit un carré

4) Déterminer les ensembles décrits par M_1 et M_2 lorsque θ varie dans $]0;\pi[$

Exercice 3 **(7 points)**

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et i

Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-i}{\overline{z}}$

1) Montrer que f n'admet aucun point invariant

2) Déterminer l'ensemble des antécédents par f du point A

3) a) Montrer que pour tout point M de $(P)-\{O;B\}$ on a : $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \left(\vec{u},\overrightarrow{BM}\right)\ [2\pi]$

b) En déduire l'ensemble des points M pour lesquels les point O, M et M' sont alignés

4) a) Montrer que pour tout point M de $(P)-\{O\}$ les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux

b) En déduire une construction du point M' à partir d'un point M donné n'appartenant pas à (OB).

c) Effectuer la construction de l'image du point C d'affixe $c_z = 1+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

5) Déterminer l'image par f de la droite D d'équation $y=1$