Série n°17 exercices de logique *1ére Bac SM*

Exercice 1: *La logique mathématique*

Soit $(x;y;z)\in \mathbb{R}$

Montrer : $(x+y\geq z)\Rightarrow\left(x\leq\frac{1}{2}z\right)ou\left(y\leq\frac{1}{2}z\right)$

Exercice 2: *La logique mathématique*

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ *tels que :* $|x|\leq 1$ *et* $|y|\leq 1$

Montrer : $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$

Exercice 3:

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})\ ;\left(x\neq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3x}{x+1}\neq 1\right)$

2) Soient a et b deux réels non nuls tels que : $b\neq 2a$

Montrer que : $\left(b\neq\frac{1}{8}a\Rightarrow\frac{a+2b}{2a-b}\neq\frac{2}{3}\right)$

Exercice 4 :

Soient a ; b et c trois réels qui appartiennent à l'intervalle $]0;1[$ *.On pose :*

$A=(ab-1)(bc-1)(ac-1)$

1) Vérifier que : $\frac{A}{abc}=\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right)$

2) Montrer que : $A<0$.

3) Déduire que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc\leq a+b+c+\frac{1}{abc}$

Exercice 5 :

1- Soient a ; b et c des nombres réels strictement positifs.

Montrer que : $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$

2 - Soient a e t b deux nombres réels strictement positifs

Mont er que : $\frac{a}{a^4+b^2}+\frac{b}{a^2+b^4}\leq\frac{1}{ab}$

3 - Soient a ; b et c des nombres réels strictement positifs

Montre que : $(a+b)(b+c)(a+c)\geq 8abc$

4 - soit $(a;b)\in \mathbb{R}^2$

Montre que : $a^2+b^2+1>a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}$

Exercice 6

Soient a ; b et c des nombres réels tels que : $a+b+c=0$.

On pose : $A=ab+bc+ca$ et $B=abc$

1) Montrer que : $a^2+b^2+c^2=-2A$.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$ .On a : $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3+Ax-B$

b) En déduire que : $a^3=-aA+B$; $a^4=-a^2A+aB$ et $a^5=aA^2+a^2B-AB$.

3) a) Montre que : $a^3+b^3+c^3=3B$; $a^4+a^4+a^4=2A^2$ et $a^5+b^5+c^5=-5AB$.

b) En déduire que : $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\times\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}=\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}$.

Exercice 7:

Soient a ; b et c des réels tels que : $(\forall x\in[-1;1])$; $|ax^2+bx+c|\le 1$

1 - Ecrire la négation de : $(\forall x\in[-1;1])$; $|ax^2+bx+c|\le 1$

2- Montrer que : $|c|\le 1$ et $-1\le a+c\le 1$

3- En Déduire que : $a^2+b^2+c^2\le 5$

Exercice 8: Raisonnement par disjonction des cas

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\sqrt{2x^2-3x+3}-x+1>0$

2) Montrer que : $n(n+1)(n+2)$ divisible par 6 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\sqrt{2x^2-3x+3}=2x-1$

Exercice 9 :

On considère $S_n=8\sum_{k=1}^{n}k$ et $R_n=(2n+1)^2$ ou n est entier naturel non nul.

1) Montrer que si $S_n=R_n$ alors $S_{n+1}=R_{n+1}$

2 pourquoi n'a-t-on pas le droit d'en déduire, par récurrence, que $S_n=R_n$ pour tout naturel non nul.