



Exercices corrigés - Ensembles

Exercice 1 - Écriture en extension

Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

$$A = \{\text{nombres entiers compris entre } \sqrt{2} \text{ et } 2\pi\}.$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} ; \exists (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} ; x = \frac{p}{n} n \text{ et } 1 \leq p \leq 2n \leq 7 \right\}.$$

Corrigé

On a : $A = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

Pour écrire B, on remarque que $\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{7}{2} \Rightarrow n = 1; 2 \text{ ou } 3$. Pour chaque valeur possible de n, on écrit

les valeurs possibles de p, et on obtient : $B = \left\{ 1; 2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3} \right\}$.

On n'a pas écrit plusieurs fois 1, qui s'obtient aussi avec $\frac{2}{2}$ et $\frac{3}{3}$, ni plusieurs fois 2, qu'on obtient avec $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$ et $\frac{6}{3}$.

Exercice 2 - Deux descriptions d'un même ensemble

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 4x - y = 1\}$ et $C = \{(t+1; 4t+3); t \in \mathbb{R}\}$; .

Démontrer que $A = C$.

Corrigé

On va procéder par double inclusion. Le plus facile est de prouver que $C \subset A$. En effet, prenons un couple $(x; y) \in C$. Alors on sait qu'il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t+1$ et $y = 4t+3$. Mais alors,

$$4x - y = 4t + 4 - 4t - 3 = 1 =$$

et donc on a bien $(x; y) \in A$.

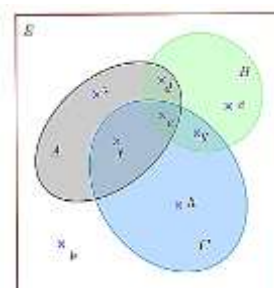
Réciproquement, prenons $(x; y) \in A$ et prouvons que $(x; y) \in C$. C'est plus difficile, car il faut construire un réel t. On va procéder par analyse-synthèse. Si un tel t existe, alors nécessairement on doit avoir $t = x - 1$. Posons donc $t = x - 1$. Alors, $y = 4x - 1 = 4(t+1) - 1 = 4t + 3$. On a donc bien $(x; y) = (t+1; 4t+3)$ et $(x; y) \in C$.

Exercice 3 - Diagramme de Venn

On considère le diagramme de Venn suivant, avec A, B, C trois parties d'un ensemble E, et a, b, c, d, e, f, g, h des éléments de E

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $g \in A \cap \bar{B}$;
2. $g \in \bar{A} \cap \bar{B}$;
3. $g \in \bar{A} \cup \bar{B}$;
4. $f \in C \setminus A$
5. $e \in \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$;
6. $\{h; b\} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;
7. $\{a; f\} \subset A \cup C$.



Corrigé

1. Faux car $g \in B$ et donc $g \notin \bar{B}$.
2. Faux pour la même raison.
3. Vrai car $g \in \bar{A}$.
4. Non car $f \in A$;
5. Faux car $e \in A$;
6. Ceci revient à démontrer que $h \in \bar{A} \cap \bar{B}$ et $b \in \bar{A} \cap \bar{B}$. C'est vrai.
7. Ceci revient à démontrer que $a \in A \cup C$ et $f \in A \cup C$: c'est vrai!

Exercice 5 - Trois ensembles

Soient A, B, C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

Corrigé

Prenons $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$, et donc $x \in B \cap C$. En particulier, $x \in B$, et donc $A \subset B$.

Prenons maintenant $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$, et donc $x \in B \cap C$. En particulier, $x \in C$, et donc $B \subset C$.

Exercice 6 - Lois de Morgan

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . Pour $X \subset E$, on note X^c le complémentaire de X dans E . Démontrer les lois de Morgan suivantes :

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
2. $(A^c)^c = A$
3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
4. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Corrigé

On raisonne à chaque fois par double inclusion.

1. Soit $x \in (A \cap B) \cup C$. Alors $(x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } x \in C$. Si $x \in A$ et $x \in B$, alors $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$, et l'inclusion est prouvée. Sinon, c'est que $x \in C$, et dans ce cas on a aussi $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$.

Réciproquement, si $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$, on distingue deux cas :

- Si $x \in C$, alors $x \in (A \cap B) \text{ ou } x \in C$ et donc $x \in (A \cap B) \cup C$.
- Sinon, $x \notin C$. Mais alors, puisque $x \in A \cup C$, on a $x \in A$. De même, puisque $x \in B \cup C$, on a $x \in B$. Ceci prouve que $x \in (A \cap B)$ et donc $x \in (A \cap B) \cup C$.

2. On suppose que $x \in (A^c)^c$. Alors $x \notin A^c$, et donc $x \in A$. Réciproquement, si $x \in A$, alors $x \notin A^c$ et donc $x \in (A^c)^c$.
3. Soit $x \in (A \cap B)^c$. Alors $x \notin A \cap B$. On a donc $x \notin A$ ou $x \notin B$, c'est-à-dire $x \in A^c$ ou $x \in B^c$. On en déduit que $x \in A^c \cup B^c$. Réciproquement, soit $x \in A^c \cup B^c$. Alors $x \in A^c$ ou $x \in B^c$, c'est-à-dire $x \notin A$ ou $x \notin B$. En particulier, $x \notin A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B)^c$.
4. On peut présenter aussi les raisonnements précédents sous forme d'équivalence. C'est ce que l'on fait pour ce dernier exemple :

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \text{ et } x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$