Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$ *et on pose* $I=[1;2]$

1) a) montrer que : $(\forall x\in I)\ ;\ f(x)\in I$

b) résoudre dans I l'équation $f(x)=x$.

2) on considère la suite (u_n) définie par : $u_0=\dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$;pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1\le u_n\le 2$.

b) montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\le\dfrac{1}{4}\left|u_n-\sqrt{2}\right|$

c) en déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \left|u_n-\sqrt{2}\right|\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

3) on pose $S_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k$, montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \left|S_n-\sqrt{2}\right|\le\dfrac{4}{3n}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$

4) on pose $W_n=\dfrac{u_n-\sqrt{2}}{u_n+\sqrt{2}}$

a) montrer que (W_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

b) en déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+2}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+2}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+2}}$

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $X_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{k^2}{3^k}$.

1) calculer X_1 et X_2.

2) montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

3) a) montrer par récurrence que : $(\forall p\ge 3)\ ;2^{p+1}>p^2$

b) en déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ X_n\le\dfrac{23}{9}$.