Continuité – Théorème des valeurs intermédiaires

A) Continuité d'une fonction.

1 - Fonction continue en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant le réel a.
On dit que f est continue en a si
$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ *ou bien* $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$

Exemple

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^+$: en effet, pour tout réel $a \geq 0$,
On a : $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

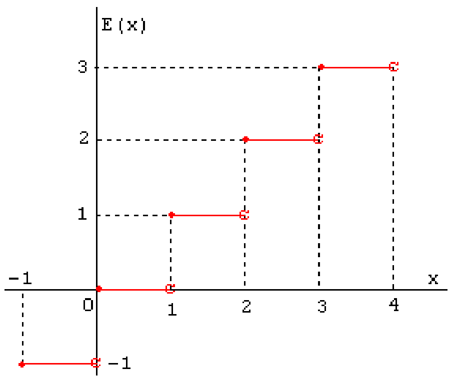
Contre-exemple : la fonction Partie entière

La fonction Partie entière qui à tout réel x associe le plus grand entier relatif inférieur à x, noté $E(x)$, est représentée ci-dessous.

Pour tout réel x, on a $E(x) \leq x < E(x)+1$
E est-elle continue en 2 ?
Pour $x \in [1;2[$, $E(x)=1$ donc $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} E(x) = 1$

Pour $x \in [2;3[$, $E(x)=2$ donc $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} E(x) = 2$

Ces limites étant différentes, la fonction E admet une limite à droite en 2 différente de celle à gauche en 2.
Donc E n'est pas continue en 2.



2- Fonction continue sur un intervalle

Définition

Une fonction est dite continue sur un intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Graphiquement, la continuité d'une fonction sur un intervalle se traduit par un tracé de sa courbe sur cet
intervalle sans lever le crayon.

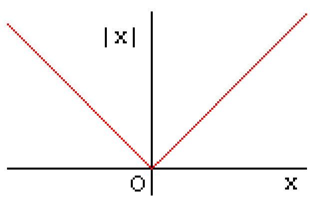
Exemples précédents

- *la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$*
- *la fonction Partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur tout intervalle du type $[n;n+1[$, où n est un entier relatif quelconque.*

Théorème

Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle.

ATTENTION !
la réciproque de ce théorème est inexacte.



Ainsi la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$
sans y être dérivable.
En effet, elle n'est pas dérivable en 0.
Sa courbe n'admet pas de tangente au point O.

Propriété

> *Les fonctions usuelles (fonctions polynômes, $\sin$, $\cos$, $\sqrt{\ }$, $|\ |$) ainsi que toute fonction construite à partir de celles-ci, sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.*

Convention

Les flèches dessinées dans un tableau de variation traduisent le sens de variation et la continuité de la fonction.

Ici f est strictement croissante sur $]-\infty;-3[$ et sur $[2;+\infty[$. Elle est strictement décroissante sur $]-3;2]$.
f est continue sur $]-\infty;-3[$ et sur $]-3;+\infty[$.

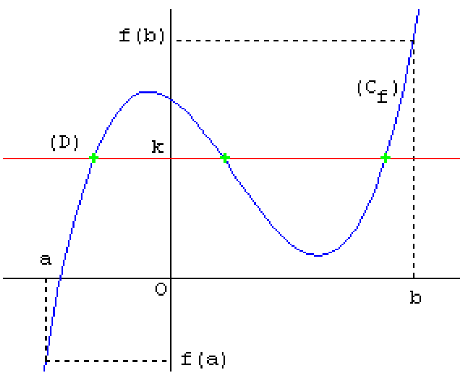
x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
f	4	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(2)$	↗	12

B) Propriétés des fonctions continues.

Théorème des valeurs intermédiaires

> *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.*
> *Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.*
> *Autrement dit, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.*

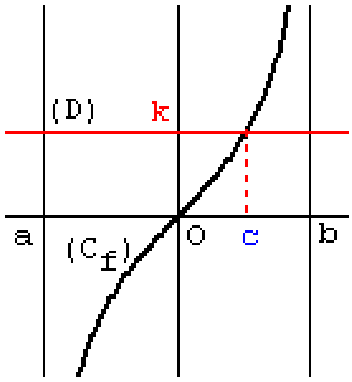
Interprétation graphique



La droite (D) d'équation $y=k$ coupe la courbe de f en au moins un point dont l'abscisse est comprise entre a et b.

Corollaire *(voir démonstration)*

> *Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique dans $[a\ ;\ b]$.*



<u>*Remarque*</u> *: ce corollaire s'étend au cas où f est continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues.*

<u>*Exemple*</u> *: si La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left]a;b\right[$, et si $\lim\limits_{a} f = -\infty$ et $\lim\limits_{b} f = +\infty$, alors*

pour tout réel k, l'équation $f(x) = k$ admet

une solution unique c dans $\left]a;b\right[$.