Série n° 12 exercices corrigés sur les suites

guessmaths

2éme Bac SM

Exercice 1

Dans chacune des cas suivants, démontrer que la suite est bornée en déterminant un majorant et un minorant de la suite.

1) (U_n) *est définie par :* $U_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

2) (V_n) *est définie par :* $V_n = \frac{(-1)^n n^2 - \sin(n)}{n^2 + 1}$

3) (W_n) *est définie par :* $W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

4) (t_n) *est définie par :* $t_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$

Correction

1) $U_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ *; pour tout* $n \in \mathbb{N}$

U_n *est la somme des (n+1) d'une suite géométrique de raison* $\frac{1}{3}$ *et de premier terme*

$U_0 = 1$ *; donc pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *; on a :*

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Et comme $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \leq 1$ *; alors* $U_n \leq \frac{3}{2}$

U_n *est la somme des (n+1) termes positifs ; alors* $0 \leq U_n$

On conclut que (U_n) *est bornée et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *; on a :* $0 \leq U_n \leq \frac{3}{2}$

2) $V_n = \dfrac{(-1)^n n^2 - \sin(n)}{n^2+1}$; *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

On a ; pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} -1 \leq (-1)^n \leq 1 \\ -1 \leq -\sin(n) \leq 1 \\ n^2 > 0 \end{cases}$; *donc* $\begin{cases} -n^2 \leq (-1)^n n^2 \leq n^2 \\ -1 \leq -\sin(n) \leq 1 \\ \dfrac{1}{n^2+1} > 0 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} -n^2 - 1 \leq (-1)^n n^2 - \sin(n) \leq n^2 + 1 \\ \dfrac{1}{n^2+1} > 0 \end{cases}$

Donc $-\dfrac{(n^2+1)}{n^2+1} \leq \dfrac{(-1)^n n^2 - \sin(n)}{n^2+1} \leq \dfrac{n^2+1}{n^2+1}$

On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq V_n \leq 1$

Exercice 2

Soit (u_n) *la suite définie par :* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{3^k}{k+1}$

Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

Correction

► *On a :* $u_1 = \sum_{k=1}^{1} \dfrac{3^k}{k+1} = \dfrac{3}{2}$

► *On a :* $u_2 = \sum_{k=1}^{2} \dfrac{3^k}{k+1} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3^2}{2+1} = \dfrac{3}{2} + 3 = \dfrac{9}{2}$

► *On a :* $u_3 = \sum_{k=1}^{3} \dfrac{3^k}{k+1} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3^2}{2+1} + \dfrac{3^3}{3+1}$

$$= \frac{3}{2} + 3 + \frac{27}{4} = \frac{45}{4}$$

► *On a :* $u_4 = \sum_{k=1}^{4} \dfrac{3^k}{k+1} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3^2}{2+1} + \dfrac{3^3}{3+1} + \dfrac{3^4}{4+1}$

$$=\frac{3}{2}+3+\frac{27}{4}+\frac{81}{5}=\frac{549}{20}$$

► *On a :* $u_5=\sum_{k=1}^{5}\frac{3^k}{k+1}=\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2+1}+\frac{3^3}{3+1}+\frac{3^4}{4+1}+\frac{3^5}{5+1}$

$$=\frac{3}{2}+3+\frac{27}{4}+\frac{81}{5}+\frac{3^5}{6}$$

$$=\frac{549}{20}+\frac{81}{2}=\frac{1359}{20}$$

Exercice 3

Soit a un réel fixé

On considère la suite (u_n) *définie par :* $u_0=a$ *et* $u_{n+1}=2u_n-u_n^2$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$

1) *Exprimer* $1-u_{n+1}$ *en fonction de* $1-u_n$

2) *En déduite* $1-u_{n+2}$ *en fonction de* $1-u_n$.

Correction

1) *On a pour tout* $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=2u_n-u_n^2$ *; donc* $1-u_{n+1}=1-2u_n+u_n^2$

$$=(1-u_n)^2$$

2) *On a pour tout* $n\in\mathbb{N}$: $1-u_{n+1}=(1-u_n)^2$

Donc $1-u_{n+2}=(1-u_{n+1})^2$

D'où $1-u_{n+2}=\left((1-u_n)^2\right)^2$

Alors $1-u_{n+2}=(1-u_n)^4$

Exercice 4

Suit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie par :* $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$

1) *Démontrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$*;* $u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

2) *Exprimer* $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ *fonction de n.*

Correction

1) *On a pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *;* $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)}$

$$= \frac{1}{n(n+1)} = u_n$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *;* $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

2) *On a :* $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

$$= 1 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} - \left(\cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *;* $S_n = \frac{n}{n+1}$

Exercice 5

Déterminer dans chacune des cas si la suite (u_n) *est géométrique ou non. Si c'est le cas, donner sa raison et son premier terme ; puis déterminer* u_n *en fonction de n.*

1) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *;* $u_n = 3e^{n-2}$

2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *;* $u_n = 5^n - 4 \times 5^{n+2}$

3) $u_0 = -3$ *et* $5u_{n+1} - 3u_n = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

4) $u_0 = 3$ *et* $u_{n+1} = 3u_n - 2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

Correction

1) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$; $u_n = 3e^{n-2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *; on a :* $u_n > 0$ *et* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3e^{n-1}}{3e^{n-2}} = e$ *; donc* $u_{n+1} = e \times u_n$

D'où la suite (u_n) *est géométrique de raison* $q = e$ *et de premier terme* $u_0 = 3e^{-2}$

On a déjà l'expression de u_n *en fonction de n :* $u_n = 3e^{-2} \times e^n = 3e^{n-2}$

2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$; $u_n = 5^n - 4 \times 5^{n+2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = 5^{n+1} - 4 \times 5^{n+1+2}$

$$= 5 \times \left(5^n - 4 \times 5^{n+2}\right)$$

$$= 5 \times u_n$$

D'où la suite (u_n) *est géométrique de raison* $q = 5$ *et de premier terme* $u_0 = -99$

On a déjà l'expression de u_n *en fonction de n :* $u_n = -99 \times 5^n = 5^n - 4 \times 5^{n+2}$

3) $u_0 = -3$ *et* $5u_{n+1} - 3u_n = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $5u_{n+1} - 3u_n = 0$

Donc $u_{n+1} = \dfrac{3}{5} u_n$

D'où la suite (u_n) *est géométrique de raison* $q = \dfrac{3}{5}$ *et de premier terme* $u_0 = -3$

Et l'expression de u_n *en fonction de n :* $u_n = -3\left(\dfrac{3}{5}\right)^n = \dfrac{-3^{n+1}}{5^n}$

4) $u_0 = 3$ *et* $u_{n+1} = 3u_n - 2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

Supposons que la suite (u_n) *est géométrique de raison* q *; on aura* $u_{n+1} = qu_n$

Donc $qu_n = 3u_n - 2$

1

D'où $u_n = \dfrac{2}{3-q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

La suite (u_n) est constante donc géométrique de raison $q = 1$

2iéme cas $q = 3$

Donc $3u_n = 3u_n - 2$

D'où $0 = -2$

Ce qui est absurde donc la suite (u_n) ne peut pas être géométrique

Exercice 6

Le but de cet exercice est de calculer la somme S_n par : $S_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\cdots1}_{n\,chiffres\,1}$

a) En multipliant S_n par 9, et en remplaçant $\underbrace{999\cdots9}_{n\,chiffres\,1}$ par $10^n - 1$; démontrer que

$$S_n = \frac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

b) Confirmer ce résultat par une démonstration par récurrence.

Correction

a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\cdots1}_{n\,chiffres\,1}$

Donc $9S_n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999\cdots9}_{n\,chiffres\,1}$

$$\begin{aligned}
&= 10^1 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \cdots + 10^n - 1 \\
&= \underbrace{10^1 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n}_{somme\ d'une\ suite\ géoùétrique\ raison\ q=10} - \left(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\ fois}\right) \\
&= 10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n \\
&= \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9} \\
&= \frac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{9}
\end{aligned}$$

b) *Confirmons par une démonstration par récurrence que* $S_n=\dfrac{10^{n+1}-9(n+1)-1}{81}$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *.*

<u>Initialisation</u>

<u>Pour n = 1</u> *On a* $S_1=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots1}_{1\,chiffres\,1}=1$ *et* $\dfrac{10^{1+1}-9(1+1)-1}{81}=1$

Donc la propriété est initialisée

<u>Hérédité</u>

Soit p un entier naturel fixé ; supposons que : $S_p=\dfrac{10^{p+1}-9(p+1)-1}{81}$ *et montrons que* $S_{p+1}=\dfrac{10^{p+2}-9(p+2)-1}{81}$

On a : $S_{p+1}=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots1}_{p\,chiffres\,1}+\underbrace{111\cdots1}_{(p+1)\,chiffres\,1}$

$$=S_p+\underbrace{111\cdots1}_{(p+1)\,chiffres\,1}$$

Hyp.Rec : $S_p=\dfrac{10^{p+1}-9(p+1)-1}{81}$

Donc $S_{p+1}=\dfrac{10^{p+1}-9(p+1)-1}{81}+\underbrace{111\cdots1}_{(p+1)\,chiffres\,1}$

$$=\frac{10^{p+1}-9(p+1)-1}{81}+10^p+10^{p-1}+\cdots+10^0$$

$$=\frac{10^{p+1}-9(p+1)-1}{81}+\frac{10^{p+1}-1}{10-1}$$

$$=\frac{10^{p+1}-9(p+1)-1+9\times10^{p+1}-9}{81}$$

$$=\frac{10^{p+1}+9\times10^{p+1}-9(p+2)-1}{81}$$

$$=\frac{10\times10^{p+1}-9(p+2)-1}{81}$$

$$=\frac{10^{p+2}-9(p+2)-1}{81}$$ *; donc la propriété est héréditaire*

Conclusion $S_n=\frac{10^{n+1}-9(n+1)-1}{81}$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$

Exercice 7

Démontrer par récurrence que :

$0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

Correction

Initialisation

Pour n = 0 *On a :* $0^3=0$ *et* $\left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2=0$; *Donc la propriété est initialisée*

Hérédité

Soit p un entier naturel fixé ; supposons que : $0^3+1^3+2^3+\cdots+p^3=\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2$ *et*

montrons que $0^3+1^3+2^3+\cdots+p^3+(p+1)^3=\left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}\right)^2$

On a : $0^3+1^3+2^3+\cdots+p^3=\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2$

Donc $0^3+1^3+2^3+\cdots+p^3+(p+1)^3=\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2+(p+1)^3$

$$=(p+1)^2\left(\frac{p^2}{4}+p+1\right)$$

$$=(p+1)^2\left(\frac{p^2+4p+4}{4}\right)$$

$$=(p+1)^2\left(\frac{(p+2)^2}{2^2}\right)$$

$$=\left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}\right)^2$$

Donc la propriété est héréditaire

Conclusion $0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$

Exercice 8

Soit (u_n) *la suite définie par :* $u_1=\frac{1}{2}$ *et* $u_n=\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times2n}$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$

Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ *;* $u_n\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

Correction

Initialisation

Pour n = 1 *On a :* $u_1=\frac{1}{2}$ *et* $\frac{(2\times1-1)}{2\times1}=\frac{1}{2}$*; Donc la propriété est initialisée*

Hérédité

Soit p un entier naturel fixé ; supposons que : $u_p\le\frac{1}{\sqrt{3p+1}}$ *et montrons que*

$u_{p+1}\le\frac{1}{\sqrt{3(p+1)+1}}$

On a : $u_{p+1}=\frac{1\times3\times\cdots\times(2p-1)\times(2p+1)}{2\times4\times\cdots\times2p\times2(p+1)}$

$$=\frac{1\times3\times\cdots\times(2p-1)}{2\times4\times\cdots\times2p}\times\frac{(2p+1)}{2(p+1)}$$

$$=u_p\times\frac{(2p+1)}{2(p+1)}$$

D'après l'Hypothèse de récurrence $u_p\le\frac{1}{\sqrt{3p+1}}$

Donc $u_{p+1} \leq \frac{1}{\sqrt{3p+1}} \times \frac{(2p+1)}{2(p+1)}$ $\boxed{1}$; montrons que : $\frac{1}{\sqrt{3p+1}} \times \frac{(2p+1)}{2(p+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{3(p+1)+1}}$

On a : $2p+1 \leq 3p+1 \Leftrightarrow (2p+1)^2 \leq (3p+1)(2p+1)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(2p+1)^2} \geq \frac{1}{(3p+1)(2p+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(2p+1)^2} \geq \frac{3}{3p+1} - \frac{2}{2p+1}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{2p+1} + \frac{1}{(2p+1)^2} \geq 1 + \frac{3}{3p+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{2p+1}\right)^2 \geq \frac{3p+1+3}{3p+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2(p+1)}{2p+1}\right)^2 \geq \frac{3p+4}{3p+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(p+1)}{2p+1} \geq \frac{\sqrt{3p+4}}{\sqrt{3p+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3p+1}} \times \frac{2p+1}{2(p+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{3p+4}} \quad \boxed{2}$$

On déduit de $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ que : $u_{p+1} \leq \frac{1}{\sqrt{3(p+1)+1}}$; donc la propriété est héréditaire

<u>Conclusion</u> $u_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$