Dans ces exercices on montrera que un changement de variable peut servir si on n'arrive pas un remarquer une forme usuelle d'une primitive. On donnera des exemples simples pour comprendre mieux le procédé

Exercice 1 :

Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$

On a : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)}\,dx$$

$$= -\left[\ln|\cos(x)|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| + \ln|\cos(0)|$$

$$= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \ln\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2$$

On a utilisé la formule de primitive : $x \mapsto \ln|u(x)|$ *est une primitive de* $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ *sur le domaine de définition de :* $x \mapsto u(x)$ *et où* $u(x)$ *ne s'annule pas.*

Exercice 2 :

On a : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= -\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

On a utilisé la formule de primitive : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ *est une primitive de* $x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ *sur le domaine de définition de :* $x \mapsto \sqrt{u(x)}$.

***Exercice 3* :**

Calculer l'intégrale suivante : $\int_2^e \frac{dx}{x\ln^3(x)}$

On a : $\int_2^e \frac{dx}{x\ln^3(x)} = \int_2^e \frac{1}{x}\times \ln^{-3}(x)\,dx$

$$= \int_2^e (\ln(x))' \times \ln^{-3}(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\ln^{-2}(x)\right]_2^e$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\ln^2(2)}$$

On a utilisé la formule de primitive : $x \mapsto -\frac{1}{2}u^{-2}(x)$ *est une primitive de* $x \mapsto u'(x)u^{-2}(x)$ *sur le domaine de définition de :* $x \mapsto u^{-2}(x)$.

***Exercice 4* :**

Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\ dx$

On a : $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (2x)\sqrt{1+x^2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(1+x^2\right)' \sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(1+x^2\right)' \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\times\left((2)^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)$$

On a utilisé la formule de primitive : $x \mapsto \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}(x)$ *est une primitive de* $x \mapsto u'(x)u^{\frac{1}{2}}(x)$ *sur le domaine de définition de :* $x \mapsto u^{\frac{3}{2}}(x)$.