



guessmaths

Devoir surveillé n° 1 C-Continuité

2ème Bac SM

Exercice 01 : (2,5 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1}$

1) Déterminer D_f .

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3) Montrer que f admet un prolongement par continuité en $x_0 = 1$.

Exercice 02 : (03 points)

Calculer chacune des limites suivantes :

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{3x-2} - \sqrt[3]{4x-3}}{x - 4\sqrt[3]{x} + 3}$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{\pi}{4} + \text{Arctan}\left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-1}} - 1\right)}{x-2}$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 + \sin x} \right)$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\text{Arctan}(3x) - \text{Arctan}(4x) \right)$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \text{Arctan}\left(\frac{x}{1 + \sqrt{x}}\right) \right)$$

Exercice 03 : (5,5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \text{Arctan}(x-1) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en $x_0 = 0$?

3) Déterminer la monotonie de f sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$

Puis en déduire $f(]-\infty; 0[)$ et $f(]0; +\infty[)$.

4) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E) : f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{19}{8}\right)$

a) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) .

Exercice 04 : (02 points)

Soit f une fonction continue sur $[0, 2]$ tels que : $f(0) = f(2)$.

Montrer qu'ils existent a et b de l'intervalle $[0, 2]$ tels que : $a - b = 1$ et $f(a) = f(b)$.

Exercice 05 : (07 points)

On considère la fonction f définie sur $I =]-\infty; 0]$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1}$

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis montrer que f est continue sur I .

b) Montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J qu'on déterminera.

c) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $K = \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{f^{-1}(\cos(2x))} & \text{si } x \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que : $(\forall x \in K), g(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin(2x) - 1}$; puis montrer que g est continue sur K .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} g(x)$

c) Montrer que : $(\forall x \in K), g(x) = \frac{-2\tan(x)}{(\tan(x) - 1)^2}$

d) Montrer que g est une bijection de K vers un intervalle L qu'on déterminera

e) Déterminer l'expression de la bijection réciproque g^{-1} .

Correction

Exercice 01 : (2,5 points)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1}$$

1) On a : $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$ et $x \neq 0$ et $x \neq 1$.

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$$

$$\text{Donc } D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$$

2) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{On a : } -1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{x} \leq \sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} \leq \frac{\sqrt{x}}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} \leq -\frac{\sqrt{x}}{x-1} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \left| \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} \right| \leq \left| \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right|$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right| = 0 \text{ d'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0}$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right| = 0 \text{ d'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

$$3) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1}$$

Posons $g(x) = \sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$; alors g est dérivable en $x_0 = 1$ comme produit de deux fonctions

dérivables en $x_0 = 1$ et $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi\sqrt{x}}{x^2} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

D'où $g'(1) = -\pi \cos(\pi) = \pi$ et d'autre part $g(1) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} \\ &= g'(1) = \pi \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pi$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ est finie alors f admet un prolongement par continuité en $x_0 = 1$

Définie par :
$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ h(1) = \pi \end{cases}$$

Exercice 02 :

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{3x-2} - \sqrt[3]{4x-3}}{x - 4\sqrt[3]{x} + 3}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{\sqrt[4]{3x-2} - \sqrt[3]{4x-3}}{x - 4\sqrt[3]{x} + 3} &= \frac{(\sqrt[4]{3x-2} - 1) - (\sqrt[3]{4x-3} - 1)}{(x+3) - 4\sqrt[3]{x}} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3x-2}-1}{\sqrt[4]{3x-2}+1} \right) - \left(\frac{4x-3-1}{(\sqrt[3]{4x-3})^2 + \sqrt[3]{4x-3} + 1} \right)}{\frac{(x+3)^3 - 4^3 x}{(x+3)^2 + 4(x+3)\sqrt[3]{x} + 4^2 \sqrt[3]{x^2}}} \\ &= \frac{\left(\frac{3x-2-1}{(\sqrt[4]{3x-2}+1)(\sqrt{3x-2}+1)} \right) - \left(\frac{4(x-1)}{(\sqrt[3]{4x-3})^2 + \sqrt[3]{4x-3} + 1} \right)}{\frac{x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - 4^3 x}{(x+3)^2 + 4(x+3)\sqrt[3]{x} + 16\sqrt[3]{x^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{3x-2-1}{(\sqrt[4]{3x-2}+1)(\sqrt{3x-2}+1)} \right) - \left(\frac{4(x-1)}{(\sqrt[3]{4x-3})^2 + \sqrt[3]{4x-3}+1} \right)}{\frac{x^3+9x^2-37x+27}{(x+3)^2+4(x+3)\sqrt[3]{x}+16\sqrt[3]{x^2}}} \\
&= \frac{\left(\frac{3(x-1)}{(\sqrt[4]{3x-2}+1)(\sqrt{3x-2}+1)} \right) - \left(\frac{4(x-1)}{(\sqrt[3]{4x-3})^2 + \sqrt[3]{4x-3}+1} \right)}{\frac{(x-1)(x^2+10x-27)}{(x+3)^2+4(x+3)\sqrt[3]{x}+16\sqrt[3]{x^2}}} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{(\sqrt[4]{3x-2}+1)(\sqrt{3x-2}+1)} \right) - \left(\frac{4}{(\sqrt[3]{4x-3})^2 + \sqrt[3]{4x-3}+1} \right)}{\frac{(x^2+10x-27)}{(x+3)^2+4(x+3)\sqrt[3]{x}+16\sqrt[3]{x^2}}}
\end{aligned}$$

Et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(\sqrt[4]{3x-2}+1)(\sqrt{3x-2}+1)} = \frac{3}{4}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(\sqrt[3]{4x-3})^2 + \sqrt[3]{4x-3}+1} = \frac{4}{3}$;

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+10x-27)}{(x+3)^2+4(x+3)\sqrt[3]{x}+16\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-16}{48} = \frac{-1}{3}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{3x-2} - \sqrt[3]{4x-3}}{x - 4\sqrt[3]{x} + 3} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{4}{3}}{\frac{-1}{3}} = 4$

► $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{\pi}{4} + \text{Arctan}\left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-1}} - 1\right)}{x-2}$

Soit la fonction h définie sur son domaine de définition par : $h(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-1}} - 1\right)$

h est dérivable sur son domaine de définition et $h'(x) = \left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-1}} - 1 \right)' \times \frac{1}{1 + \left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-1}} - 1 \right)^2}$

$$= \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{x-1} \right)^2}}{3(x-1)^2} \times \frac{1}{1 + \left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-1}} - 1 \right)^2}$$

Donc $h'(x) = 0$ et $h(2) = \text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

D'où $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{\pi}{4} + \text{Arctan}\left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-1}} - 1\right)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{h(x) - h(2)}{x-2} = h'(2) = 0$

► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 + \sin x} \right)$

Pour $x > 1$ on a : $x - \sqrt[3]{x^3 + \sin x} = \frac{x^3 - (x^3 + \sin x)}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 + \sin x} + \sqrt[3]{(x^3 + \sin x)^2}}$

$$= \frac{-\sin x}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 + \sin x} + \sqrt[3]{(x^3 + \sin x)^2}}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 + x^3 \leq x^3 + \sin x \leq 1 + x^3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1 + x^3)^2 \leq (x^3 + \sin x)^2 \leq (1 + x^3)^2 \\ \sqrt[3]{-1 + x^3} \leq \sqrt[3]{x^3 + \sin x} \leq \sqrt[3]{1 + x^3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sqrt[3]{(-1 + x^3)^2} \leq \sqrt[3]{(x^3 + \sin x)^2} \leq \sqrt[3]{(1 + x^3)^2} \\ 0 < x\sqrt[3]{-1 + x^3} \leq x\sqrt[3]{x^3 + \sin x} \leq x\sqrt[3]{1 + x^3} \end{cases}$$

Donc :

$$0 < x^2 + x\sqrt[3]{-1 + x^3} + \sqrt[3]{(-1 + x^3)^2} \leq x^2 + x\sqrt[3]{x^3 + \sin x} + \sqrt[3]{(x^3 + \sin x)^2} \leq x^2 + x\sqrt[3]{1 + x^3} + \sqrt[3]{(1 + x^3)^2}$$

D'où

$$0 < \frac{1}{x^2 + x\sqrt[3]{1+x^3} + \sqrt[3]{(1+x^3)^2}} \leq \frac{1}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 + \sin x} + \sqrt[3]{(x^3 + \sin x)^2}} \leq \frac{1}{x^2 + x\sqrt[3]{-1+x^3} + \sqrt[3]{(-1+x^3)^2}}$$

Donc

$$0 < \left| \frac{1}{x^2 + x\sqrt[3]{1+x^3} + \sqrt[3]{(1+x^3)^2}} \right| \leq \left| \frac{-\sin x}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 + \sin x} + \sqrt[3]{(x^3 + \sin x)^2}} \right| \leq \left| \frac{1}{x^2 + x\sqrt[3]{-1+x^3} + \sqrt[3]{(-1+x^3)^2}} \right|$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + x\sqrt[3]{-1+x^3} + \sqrt[3]{(-1+x^3)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + x\sqrt[3]{1+x^3} + \sqrt[3]{(1+x^3)^2}} = 0$$

$$\text{Alors } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 + \sin x} \right) = 0}$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} (\text{Arctan}(3x) - \text{Arctan}(4x))$$

$$\text{Pour } x < 0 ; \text{ on a : } \begin{cases} \text{Arctan}(3x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3x}\right) = -\frac{\pi}{2} \\ \text{Arctan}(4x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{4x}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \text{Arctan}(3x) - \text{Arctan}(4x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{4x}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{3x}\right)$$

$$\text{Et } x < -1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{-1}{4x} < 1 \\ 0 < \frac{-1}{3x} < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \text{Arctan}\left(\frac{-1}{4x}\right) < \frac{\pi}{4} \\ 0 < \text{Arctan}\left(\frac{-1}{3x}\right) < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \text{Arctan}\left(\frac{1}{4x}\right) < 0 \\ 0 < -\text{Arctan}\left(\frac{1}{3x}\right) < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \text{Arctan}\left(\frac{1}{4x}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{3x}\right) < \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \text{Arctan}\left(\frac{1}{4x}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{3x}\right) < \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \text{Arctan}(3x) - \text{Arctan}(4x) < \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \tan(\text{Arctan}(3x) - \text{Arctan}(4x)) &= \frac{\tan(\text{Arctan}(3x)) - \tan(\text{Arctan}(4x))}{1 + \tan(\text{Arctan}(3x)) \times \tan(\text{Arctan}(4x))} \\ &= \frac{-x}{1 + 12x^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{Arctan}(3x) - \text{Arctan}(4x) = \text{Arctan}\left(\frac{-x}{1 + 12x^2}\right)$$

Et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{1 + 12x^2} = 0$; comme la fonction Arctan est continue en 0 ;

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}\left(\frac{-x}{1 + 12x^2}\right) = \text{Arctan}(0) = 0$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} (\text{Arctan}(3x) - \text{Arctan}(4x)) = 0}$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \text{Arctan}\left(\frac{x}{1 + \sqrt{x}}\right) \right)$$

Pour $x > 0$; on a :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \text{Arctan}\left(\frac{x}{1 + \sqrt{x}}\right) &= \frac{\pi}{2} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1 + \sqrt{x}}{x}\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}) + \sqrt{x} \text{Arctan}\left(\frac{1 + \sqrt{x}}{x}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} \right) + \sqrt{x} \times \frac{1 + \sqrt{x}}{x} \times \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1 + \sqrt{x}}{x}\right)}{\frac{1 + \sqrt{x}}{x}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 \right)} \right) + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \times \frac{\operatorname{Arctan} \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{x} \right)}{\frac{1 + \sqrt{x}}{x}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} \right) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \times \frac{\operatorname{Arctan} \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{x} \right)}{\frac{1 + \sqrt{x}}{x}}$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} \right) = \frac{1}{2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right) = 1$$

$$\text{Aussi } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Arctan} \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{x} \right)}{\frac{1 + \sqrt{x}}{x}} = 1 \text{ on pose } X = \frac{1 + \sqrt{x}}{x} \text{ alors } x \rightarrow +\infty \text{ on a : } X \rightarrow 0 \text{ et}$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan} X}{X} = 1$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{1 + \sqrt{x}} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} \right) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \times \frac{\operatorname{Arctan} \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{x} \right)}{\frac{1 + \sqrt{x}}{x}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 = \frac{\pi}{4} + 1$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{1 + \sqrt{x}} \right) \right) = \frac{\pi}{4} + 1}$$

Exercice 03 :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f(x) = \operatorname{Arctan}(x-1) - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right).$$

$$\begin{aligned}
 1) \quad \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\text{Arctan}(x-1) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\text{Arctan}(x-1) \right) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\
 &= -\frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}}$

De la même façon on montre que : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}}$

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\text{Arctan}(x-1) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\text{Arctan}(x-1) \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}}$

$$\begin{aligned}
 2) \text{ Soit } x > 0 ; \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\text{Arctan}(x-1) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\text{Arctan}(x-1) \right) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\
 &= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Par suite $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{3\pi}{4}}$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } x < 0 ; \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\text{Arctan}(x-1) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\text{Arctan}(x-1) \right) - \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\
 &= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Par suite $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{\pi}{4}$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$; par conséquent f n'admet pas de prolongement par continuité en $x_0 = 0$.

3) Déterminons la monotonie de f sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
 f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$; et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$; on

$$a : f'(x) = (x-1)' \times \frac{1}{1+(x-1)^2} - \left(\frac{1}{x}\right)' \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{1+(x-1)^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+(x-1)^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) > 0$; par suite f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

$$D'où \quad f(]-\infty; 0[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right[= \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4} \right[$$

$$\text{et } f(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= \left] \frac{3\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} \right[.$$

4) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E) : f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{19}{8}\right)$

a) On a : $\frac{19}{8} > 1 \Rightarrow \text{Arctan}\left(\frac{19}{8}\right) > \text{Arctan}(1)$

$$\Rightarrow \text{Arctan}\left(\frac{19}{8}\right) > \frac{\pi}{4}$$

Donc $\text{Arctan}\left(\frac{19}{8}\right) \notin \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4} \right[$ d'où l'équation (E) n'admet pas de solution dans $]-\infty; 0[$

Et $\text{Arctan}\left(\frac{19}{8}\right) \in \left]-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$; comme la restriction de f à $]0; +\infty[$ est bijective alors l'équation (E) admet une unique solution dans $]0; +\infty[$

De plus $f(1) = -\frac{\pi}{4}$; donc si x est solution de (E) alors $f(x) > f(1)$

Car $\text{Arctan}\left(\frac{19}{8}\right) > \frac{\pi}{4}$

D'où $x > 1$ f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Par suite l'équation (E) admet une unique solution dans $]1; +\infty[$

b) D'après ce qui précède on : ► si $x \in]-\infty; 0[$; alors $f(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right[$
 ► si $x \in]0; +\infty[$; alors $f(x) \in \left]-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \tan(f(x)) \text{ existe et on a : } \tan(f(x)) &= \tan\left(\text{Arctan}(x-1) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{\tan(\text{Arctan}(x-1)) - \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{1 + \tan(\text{Arctan}(x-1)) \times \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)} \\ &= \frac{x-1 - \frac{1}{x}}{1 + (x-1) \times \frac{1}{x}} \\ &= \frac{x^2 - x - 1}{x + x - 1} \\ &= \frac{x^2 - x - 1}{2x - 1} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \text{Arctan}(x-1) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{x^2 - x - 1}{2x - 1}\right)$$

$$\text{Soit } x > 1 ; \text{ Alors (E) } \Leftrightarrow \text{Arctan}\left(\frac{x^2 - x - 1}{2x - 1}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{19}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{2x - 1} = \frac{19}{8}$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 8x - 8 = 38x - 19$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 46x + 11 = 0$$

$$\text{On a : } \Delta = (46)^2 - 4 \times 8 \times 11 = 1764$$

$$\begin{aligned} D'où : x_1 &= \frac{46 - \sqrt{1764}}{2 \times 8} \\ &= \frac{46 - 42}{16} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{46 + \sqrt{1764}}{2 \times 8} \\ &= \frac{46 + 42}{16} \\ &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } x_1 < 1 \text{ et } x_2 > 1$$

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{11}{2} \right\}$$

Exercice 05 : (07 points)

$$(\forall x \in I =]-\infty; 0]) ; f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} 1) a) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-(1 - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} - \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{(1 - x)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} - \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{1 - 2x + x^2}} = -1 \end{aligned}$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{1 - 2x + x^2} = 1 \text{ et la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est continue en } 1)$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x}$ est continue sur I comme composée de deux fonctions continues sur I ; la fonction $x \mapsto x - 1$ est continue sur I et ne s'annule pas sur I , donc f est continue sur I comme quotient de deux fonctions continues sur I .

b) f est dérivable sur I est pour tout $x \in I$; on a :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x-1} \right)' \\
 &= \frac{(2x-2)(x-1) - \sqrt{x^2 - 2x}}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{(x-1)^2 - (x^2 - 2x)}{(x-1)^2 \sqrt{x^2 - 2x}} \\
 &= \frac{1}{(x-1)^2 \sqrt{x^2 - 2x}}
 \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in I =]-\infty; 0]) ; f'(x) > 0$

Alors f est continue et strictement croissante sur I ; donc f est une bijection de I vers un intervalle $J = f(I)$

$$\begin{aligned}
 J &= f(]-\infty; 0]) \\
 &= \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(0) \right] \\
 &=]-1; 0]
 \end{aligned}$$

c) Soit $y \in I$ pour tout $x \in J$; on a : $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow x &= \frac{\sqrt{y^2 - 2y}}{y-1} \\
 \Leftrightarrow x &= \sqrt{\frac{y^2 - 2y}{(y-1)^2}} \\
 \Leftrightarrow x &= \sqrt{\frac{(y-1)^2 - 1}{(y-1)^2}} \\
 \Leftrightarrow x &= \sqrt{1 - \frac{1}{(y-1)^2}} \\
 \Leftrightarrow x^2 &= 1 - \frac{1}{(y-1)^2} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{(y-1)^2} &= 1 - x^2
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{ou} \\ y-1 = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{ou} \\ y = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

Or $y \leq 0$; donc $(\forall x \in J) ; \boxed{f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$$2) \left(\forall x \in K = \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right] \right) ; \begin{cases} g(x) = \frac{1}{f^{-1}(\cos(2x))} \text{ si } x \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

a) Pour tout $x \in K = \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$; on a : $f^{-1}(\cos(2x)) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-(\cos(2x))^2}}$
 $= 1 - \frac{1}{|\sin(2x)|}$

$$\text{Et } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2x < \pi$$

$$\Rightarrow 0 < \sin(2x) < 1$$

$$\Rightarrow 0 < |\sin(2x)| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\sin(2x)|} > 1$$

$$\Rightarrow 0 > 1 - \frac{1}{|\sin(2x)|}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\cos(2x)) < 0$$

D'où g est l'inverse d'une fonction continue $x \mapsto f^{-1}(\cos(2x))$ (comme composée de deux fonctions continues sur $\left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[$ et $f^{-1}(\cos(2x))$ ne s'annule jamais sur $\left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[$; donc g est continue sur $\left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Etudions la continuité de g à gauche en $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Pour tout } x \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[; \text{ on a : } g(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sin(2x)}} \\ = \frac{\sin(2x)}{\sin(2x) - 1}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sin(2x)}{\sin(2x) - 1} = 0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; alors g est continue à gauche en

$$x_0 = \frac{\pi}{2}$$

Par suite g est continue sur K .

b) Calculons $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} \frac{\sin(2x)}{\sin(2x) - 1} = -\infty$$

(Car $\sin(2x) - 1 < 0$ et $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$)

$$\text{c) Pour tout } x \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\text{ on a : } g'(x) = \left(\frac{\sin(2x)}{\sin(2x) - 1} \right)' \\ = \frac{2\cos(2x)(\sin(2x) - 1) - 2\cos(2x)\sin(2x)}{(\sin(2x) - 1)^2} \\ = \frac{-2\cos(2x)}{(\sin(2x) - 1)^2}$$

$$\text{Et } x \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\Rightarrow 2x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$$

$$\Rightarrow \cos(2x) < 0$$

$$\text{Donc } \left(\forall x \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\right) ; g'(x) > 0$$

D'où g est continue strictement croissante sur K ; par suite c est une bijection de K vers

$$\text{un intervalle } L = g\left(\left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\right) = \left[\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} g(x) ; \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x) \right[\\ =]-\infty; 0[$$

$$d) \text{ On a : } (\forall x \in K), g(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin(2x) - 1}$$

$$= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2\sin(x)\cos(x) - 1}$$

$$= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \times \frac{2 \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{2 \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{1}{\cos^2(x)}}$$

$$= \frac{2\tan(x)}{2\tan(x) - (1 + \tan^2(x))}$$

$$= \frac{-2\tan(x)}{(\tan(x) - 1)^2}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in K) ; g(x) = \frac{-2\tan(x)}{(\tan(x) - 1)^2}$$

$$e) \text{ Soit } x \in]-\infty; 0[\text{ et } y \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[; \text{ on a : } y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2\tan(y)}{(\tan(y)-1)^2}$$

Posons $Y = \tan(y)$

$$\text{On a : } x = \frac{-2Y}{(Y-1)^2} \Leftrightarrow x(Y-1)^2 + 2Y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(Y-1)^2 + 2Y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(Y^2 - 2Y + 1) + 2Y = 0$$

$$\Leftrightarrow xY^2 + 2(1-x)Y + x = 0$$

$$\text{Donc } \Delta = 4(1-x)^2 - 4x^2 = 4(1-2x)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } Y_1 &= \frac{-2(1-x) - 2\sqrt{1-2x}}{2x} \\ &= -\frac{(1-x) + \sqrt{1-2x}}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{-2(1-x) + 2\sqrt{1-2x}}{2x} \\ &= -\frac{(1-x) - \sqrt{1-2x}}{x} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } y \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\Rightarrow Y = \tan(y) > 1$$

$$\text{Or pour } x = -1 ; \text{ on a : } Y_1 = 2 + \sqrt{3} > 1 \text{ et } Y_2 = 2 - \sqrt{3} < 1$$

$$\text{Donc } \tan(y) = -\frac{(1-x) + \sqrt{1-2x}}{x} \Rightarrow y = \text{Arctan}\left(-\frac{(1-x) + \sqrt{1-2x}}{x}\right)$$

$$\text{Par suite } (\forall x \in]-\infty; 0[) ; g^{-1}(x) = \text{Arctan}\left(-\frac{(1-x) + \sqrt{1-2x}}{x}\right).$$