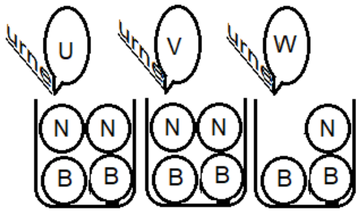
Correction Examen National 2014

Session de Rattrapage **2éme Bac SC.Maths**

Exercice 1



1) Par tirer de l'urne U il fait d'abord tirer une boule Blanche de l'urne W ; donc : $P_{(\text{tirerdeU})} = \frac{2}{3}$

2) La probabilité d'obtenir 2 boules Blanches à le fin de l'expérience de réalise si

•) On tire une boule Blanche de l'urne W puis 2 boules blanches de l'une U, ou tire une boule Noir de l'urne W puis 2 boules Blanche de l'urne V d'où :

$$\begin{aligned} P_{(2\text{boulesB})} &= \frac{2}{3}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^2}{C_5^2} \\ &= \frac{2}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{10} \\ &= \frac{7}{30} \end{aligned}$$

3) Lai de probabilité de le variable aléatoire X.

On a : $X(\Omega) = \{0;1;2\}$

- $P(X=1) = \frac{2}{3}\times\frac{C_2^1\times C_3^1}{C_5^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^1\times C_3^1}{C_5^2} = \frac{18}{30}\,30$
- $P(X=0) = \frac{2}{3}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{5}{30}$

D'après question 2) $P(X=2) = \frac{7}{30}$

D'où la loi de probabilité de X.

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{7}{30}$

Exercice 2

$(\forall n\in\mathbb{N})\ c_n = 2.10^n - 1$ et $b_n = 2.10^n + 1$.

1) On a : $b_n = c_n \times 1 + 2$ *et* $0 < 2 < c_n$ *(* $car : n \geq 1$ *)*

Alors , d'après l'Algorithme d'Euclide : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$

Et comme c_n *est impair ; alors :* $c_n \wedge 2 = 1$

Donc : $b_n \wedge c_n = 1$

On en déduit que b_n *et* c_n *sont premiers entre eux.*

***On conclut** :* $\boxed{c_n \wedge 2 = 1}$ *et* $\boxed{b_n \wedge c_n = 1}$

2) Comme $b_n \wedge c_n = 1$*; alors d'après le théorème de Bézout :*

$\exists(x_n;y_n)\in\mathbb{Z}^2\ /\ b_nx_n+c_ny_n=1.$

D'après l'algorithme d'Euclide ,on a :

$$\begin{cases} b_n=c_n+2 \\ c_n=2(10^n-1)+1 \end{cases}\Rightarrow 1=c_n-2(10^n-1)$$

$$\Rightarrow 1=c_n-(b_n-c_n)(10^n-1)$$

$$\Rightarrow 1=c_n.10^n+(1-10^n).b_n=b_n.(1-10^n)+c_n.10^n$$

On déduit que : $\boxed{x_n=1-10^n}$ *et* $\boxed{y_n=10^n}$.

Exercice 3 :

I. $\forall(a;b)\in(]-1;1[)^2\ ;\ a*b=\dfrac{a+b}{1+ab}$

1) a) Soit $(a;b)\in(]-1;1[)^2$

• On a : $\begin{cases} -1<a<1 \\ -1<b<1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} |a|<1 \\ |b|<1 \end{cases}$

$$\Rightarrow |ab|<1$$
$$\Rightarrow -1<ab<1$$
$$\Rightarrow 0<1+ab<2$$

Donc : $\forall(a;b)\in(]-1;1[)^2\ ;\ 1+ab>0$

• On a : $a*b-1=\dfrac{a+b}{1+ab}-1$

$$=\frac{(a-1)(1-b)}{1+ab}$$

Donc : $a*b-1<0$ (car $a-1<0\ ;1-b>0$ et $1+ab>0$)

D'où : $a*b<1$

• On a : $a*b+1=\dfrac{a+b}{1+ab}+1$

$$=\frac{(a+1)(b+1)}{1+ab}$$

Donc : $a*b+1>0$ (car $a+1>0\ ;\ b+1>0$ et $1+ab>0$)

D'où : $-1<a*b$

On en déduit que : $(\forall(a;b)\in J^2)\ ;\ -1<a*b<1$

Donc $(\forall(a;b)\in J^2)\ \ (a*b)\in J$.

d'où : $*$ est une loi de composition interne dans J.

2) a) Montrons que la loi $*$ est commutative et Associative dans J.

• On a : pour tout $(x;y)\in J^2$:

$$x*y=\frac{x+y}{1+xy}$$
$$=\frac{y+x}{1+yx}$$
$$=y*x$$

Donc la loi $*$ est commutative dans J.

• On a : pour tout $(x;y;z)\in J^3$:

¬ $$(x*y)*z=\frac{x+y}{1+xy}*z$$
$$=\frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\times z}$$
$$=\frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

¬ $$x*(y*z)=x*\frac{y+z}{1+yz}$$
$$=\frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\times\frac{y+z}{1+yz}}$$
$$=\frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

Donc $(x*y)*z=x*(y*z)$

D'où : la loi $*$ est associative dans J.

Conclusion : la loi $*$ est commutative et associative dans J.

5) Déterminons l'élément neutre e pour $*$ dans J.

tel que $(\forall x\in J)\ ;x*e=x$.

• Pour tout $x\in J$; on a :

$$x*e=\frac{x+e}{1+x.e}=x\Leftrightarrow x+e=(1+x.e).x$$
$$\Leftrightarrow(1-x^2).e=0$$
$$\Leftrightarrow e=0\ \ (\text{ car } x\in J=]-1;1[\text{ et par suite } 1-x^2\neq0)$$

Puisque $*$ est commutative on a donc : $x*0=0*x=x$
Et comme $0\in J$, alors : 0 est l'élément neutre pour la loi $*$ dans J.

c) Montrons que $(J\,;*)$ est un groupe commutatif.

On a : la loi $*$ est commutative et associative et admet un élément neutre 0 dans J.

Reste à montrer que tout élément de J est symétrisable dans J pour la loi $*$

Soit $x \in J$. Cherchons x' de J tel que : $x*x' = x'*x = 0$

$$x*x' = 0 \Leftrightarrow \frac{x+x'}{1+x.x'} = 0$$
$$\Leftrightarrow x' = -x$$

Comme $x \in]-1\,;1[$ alors $-x \in]-1\,;1[$ et $*$ est une loi commutative dans J ; donc :

$(\forall x \in J)(\exists x' = -x \in J)$: $x*x' = x'*x = 0$

Donc tout $x \in J$ admet un symétrique $x' = -x$ dans J par la loi $*$.

Conclusion :

$(J\,;*)$ est un groupe commutatif.

II- f est une application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1) Montrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers J.

Soit $y \in J$; Résolvons l'équation : $f(x) = y$ .Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$
$$\Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1$$
$$\Leftrightarrow ye^x - e^x = -y - 1$$
$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y+1}{1-y}$$

Et comme $y \in]-1;1[$, alors $\dfrac{y+1}{1-y} > 0$

Donc : $f(x) = y \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{y+1}{1-y}\right)$

Ainsi : $(\forall y \in J)\,(\exists x \in \mathbb{R})$: $f(x) = y$

On en déduit que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers J.

Remarque : On peut montrer que f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$, et on déduit que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans J .

2) $\perp$ une loi définie dans J par :

$(\forall (x;y) \in J^2)$: $x \perp y = f\big(g(x) \times g(y)\big)$ (g est la bijection réciproque de f)

Montrons que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*\,;\times)$ vers $(J^*\,;\perp)$ $(J^* = J - \{0\})$

Soit $(x;y) \in (\mathbb{R}^*)^2$. On a : $f(x) \perp f(y) = f\big(g(f(x)) \times g(f(y))\big)$

Comme g est la bijection réciproque de f alors $g(f(x)) = x$ et $g(f(y)) = y$

Donc : $f(x) \perp f(y) = f(x \times y)$

D'où f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*\,;\times)$ vers $(J^*\,;\perp)$.

2) Montrons que $(J;*;\perp)$ est un corps commutatif.

On a $(J;*)$ est un groupe commutatif d'élément neutre 0.

On a f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*;\times)$ vers $(J^*;\perp)$; et $(\mathbb{R}^*;\cdot)$ est un groupe Commutatif

donc $(f(\mathbb{R}^*);\perp)$ est un groupe Commutatif

Or f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans J , alors $f(\mathbb{R})=J$

Et comme f(0)=0 ($0\in\mathbb{R}$ et $0\in J$), alors $f(\mathbb{R}^*)=J^*$.

Par suite $(J^*;\perp)$ est un groupe Commutatif

Et on a $\perp$ est distributive par rapport à $*$ dans J.

Donc : $(J;*;\perp)$ est un corps commutatif.

<u>Exercice 4</u>

I- 1) Résolvons l'équation : $z^2+i=0$.

On a : $z^2+i=0 \Leftrightarrow z^2=-i$

$$\Leftrightarrow z^2=\frac{1}{2}(1-i)^2$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } z=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

Comme a est la solution de l'équation qui vérifie $Re(a)>o$; alors : $a=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) a) $a=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc : $1+a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$=1+e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$=e^{-i\frac{\pi}{8}}\left(e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{-i\frac{\pi}{8}}$$

Comme $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ alors ; $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$

On déduit que : $|1+a|=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\arg(1+a)\equiv-\frac{\pi}{8}\,[2\pi]$

b) D'après la question précédente on a : $|1+a|=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}|1+a|$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

Donc: $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

c) On a : $(1+a)(1-a)=1-a^2=1-(-i)=1+i$

- D'après ce qui précède ; on a :

On a : $1-a=\frac{1+i}{1+a}$; donc :

¬ $|1-a|=\left|\frac{1+i}{1+a}\right|$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

¬ $\arg(1-a)\equiv\arg\left(\frac{1+i}{1+a}\right)[2\pi]$

$$\equiv(\arg(1+i)-\arg(1+a))[2\pi]$$

$$\equiv\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)[2\pi]$$

$$\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$$

Donc : $\boxed{1-a=\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)}$

Remarque : On peut aussi écrire :

$$1-a=\frac{1+i}{1+a}=\frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{-i\frac{\pi}{8}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$$

II- $A(a);B(-a);\ M(z)\ ;M'(z')$ et $N(\overline{z})$ tel que : $zz'+i=0$

1) Montrons que des droites (ON) et (OM') sont perpendiculaires.

$$\frac{z'}{\bar{z}} \equiv \frac{zz'}{z\bar{z}}\left[2\pi\right]$$

$$\equiv \frac{-i}{|z|^2}\left[2\pi\right]$$

Alors : $\arg\left(\frac{z'}{\bar{z}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$

Donc : $\left(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$

Par suite les droites (ON) et (OM') sont perpendiculaires.

2) a) Montrons que : $z' - a = i\frac{z-a}{az}$

On a : $z' - a = -\frac{i}{z} - a$

$$= \frac{-i - az}{z}$$

$$= \frac{-ia - a^2 z}{az}$$

$$= \frac{-ia + iz}{az} \qquad \left(\text{car} \quad a^2 = -i\right)$$

$$= i\frac{z-a}{az}$$

Donc : $\boxed{z' - a = i\frac{z-a}{az}}$

b) On a : $z' + a = z' - a + 2a$

$$= i\frac{z-a}{az} + 2a$$

$$= \frac{iz - ia + 2a^2 z}{az}$$

$$= \frac{iz - ia - 2iz}{az} \qquad \left(\text{car} a^2 = -i\right)$$

$$= -i\frac{z+a}{az}$$

Donc : $z' + a = -i\frac{z+a}{az}$

D'où : $z \neq -a \Rightarrow z + a \neq 0$

$$\Rightarrow z' + a \neq 0$$

$$\Rightarrow z' \neq -a$$

Par suite : $z \neq -a \Rightarrow z' \neq -a$.

On a : $z' + a = -i\frac{z+a}{az}$ et $z' - a = i\frac{z-a}{az}$

Donc : $\frac{z'-a}{z'+a}=\frac{i\frac{z-a}{az}}{-i\frac{z+a}{az}}=-\frac{z-a}{z+a}$

Càd : $\frac{z'-a}{z'+a}=-\frac{z-a}{z+a}$

3) On suppose que les points A ; B et M ne sont pas alignés , alors $z\neq -a$ donc $z'\neq -a$.

D'où les points A; B; M et M' ne sont pas alignés .

Donc : A ; B ; M et M'sont cocycliques est équivaux à $\frac{z'-a}{z-a}\times\frac{z+a}{z'+a}\in\mathbb{R}$.

Et d'après (2-b) : $\frac{z'-a}{z'+a}=-\frac{z-a}{z+a}$ donc $\frac{z'-a}{z-a}\times\frac{z+a}{z'+a}=-1$

Donc $\frac{z'-a}{z-a}\times\frac{z+a}{z'+a}\in\mathbb{R}$

D'où les points A; B; M et M' sont cocycliques.

Exercice 5 :

f est définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

1) On a : •) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}=+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$)

•) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{t\to +\infty}\frac{-2\ln t}{t}=0$ (On pose $t=\sqrt{x}$) , (car $\lim\limits_{t\to +\infty}\frac{\ln t}{t}=0$)

Interprétation Géométrique

- la courbe de f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.
- la courbe de f admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale

2) La fonction $x\mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$;

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}$

$=\frac{\ln x-2}{2x\sqrt{x}}$

Donc : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $\boxed{f'(x)=\frac{\ln x-2}{2x\sqrt{x}}}$

- $f'(x)$ est du même signe que $\ln x-2$

$\ln x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 2$

$\Leftrightarrow x \geq e^2$

Donc ▪ $f'(x) \geq 0$ pour $x \in \left[e^2; +\infty\right[$

▪ $f'(x) \leq 0$ pour $x \in \left]0; e^2\right]$

Par suite f est strictement croissante sur $\left[e^2; +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]0; e^2\right]$.

3) La fonction g_n est définie sur $]0;1[$ par : $g_n(x) = f(x) - x^n$; où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrons que g_n est strictement décroissante sur $]0;1[$.

Les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto -x^n$ sont dérivables sur $]0;1[$; donc g_n est dérivable sur $]0;1[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0;1[$, et pour tout $x \in]0;1[$ on a:

$g_n'(x) = f'(x) - nx^{n-1}$

(Comme $f'(x) \leq 0$ sur $]0;1]$ $\left(]0;1] \subset \left]0; e^2\right]\right)$ et $-nx^{n-1} < 0$)

Alors : $\left(\forall x \in]0;1[\right)$; $g_n'(x) < 0$

Par suite g_n est strictement décroissante sur $]0;1[$.

b) Montrons que : $\left(\exists! \alpha_n \in]0;1[\right)$: $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$

g_n est continue et strictement décroissante sur $]0;1[$; donc g_n est une bijection de $]0;1[$ Vers $g_n\left(]0;1[\right)$ et : $g_n\left(]0;1[\right) = \left]\lim\limits_{x \to 1^-} g_n ; \lim\limits_{x \to 0^+} g_n\right[=]-1; +\infty[$

Comme $0 \in]-1; +\infty[$ alors l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]0;1[$;

càd: $\left(\exists! \alpha_n \in]0;1[\right)$: $g_n(\alpha_n) = 0$.

Donc : $\left(\exists! \alpha_n \in]0;1[\right)$: $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$

c) Montrons que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $g_n(\alpha_{n+1}) < 0$.

On a : $f(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1})^{n+1}$

Donc $g_n(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1})^{n+1} - (\alpha_{n+1})^n$

$= (\alpha_{n+1})^n (\alpha_{n+1} - 1)$

Comme $\alpha_{n+1} \in]0;1[$; donc : $(\alpha_{n+1})^n > 0$ et $(\alpha_{n+1} - 1) < 0$

Par suite $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $g_n(\alpha_{n+1}) < 0$.

d) Montrons que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

On a : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $g_n(\alpha_{n+1}) < 0$ et $g_n(\alpha_n) = 0$

Donc : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(\alpha_n)$

Comme g_n est une bijection strictement décroissante sur $]0;1[$; alors g_n^{-1} est aussi strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$; donc :

$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $g_n^{-1}\left(g_n(\alpha_{n+1})\right) > g_n^{-1}\left(g_n(\alpha_n)\right)$

D'où : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $\alpha_{n+1} > \alpha_n$

Par suite la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Conclusion :

La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1 ; alors elle est convergente.

4) a) Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

Vérifions que : $0 < \alpha_1 \leq \ell \leq 1$.

On a : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right); 0<\alpha_n<1$ donc $0\leq\ell\leq 1$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante

donc : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$; $\alpha_n \geq \alpha_1$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell \geq \alpha_1$; Donc ℓ vérifie $0 < \alpha_1 \leq \ell \leq 1$.

b) Montrons que : $h(\alpha_n) = n$.

On a pour tout $x \in \left]0;1\right[$; $h(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln(-\ln(x))}{\ln x}$ et $\alpha_n \in \left]0;1\right[$ donc :

$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$; $h(\alpha_n) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln \alpha_n}$

Comme $\forall x>0$; $f(x) = \dfrac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

Alors : $(\alpha_n)^n = f(\alpha_n) = \dfrac{-\ln(\alpha_n)}{\sqrt{\alpha_n}} \Rightarrow -\ln(\alpha_n) = (\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}$

$$\text{Donc : } \left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right) ; h(\alpha_n) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln\left((\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}\right)}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{2} + \left(n+\frac{1}{2}\right) \times \frac{\ln(\alpha_n)}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{2} + \left(n+\frac{1}{2}\right) \times \frac{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{2} + n + \frac{1}{2} = n$$

Donc : $\boxed{\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right); h(\alpha_n) = n}$.

Remarque : On peut aussi faire un raisonnement par équivalence successive comme suit :

$$f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n \Leftrightarrow \frac{-\ln(\alpha_n)}{\sqrt{\alpha_n}} = (\alpha_n)^n$$

$$\Leftrightarrow -\ln(\alpha_n) = \sqrt{\alpha_n}\ (\alpha_n)^n$$

$$\Leftrightarrow \ln(-\ln(\alpha_n)) = \ln\left(\sqrt{\alpha_n}\ (\alpha_n)^n\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(-\ln(\alpha_n)) = \ln\left(\sqrt{\alpha_n}\right) + \ln\left((\alpha_n)^n\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(-\ln(\alpha_n)) = \frac{1}{2}\ln(\alpha_n) + n\ln(\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)} = n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}=n$$

$$\Leftrightarrow h(\alpha_n)=n$$

c) Montrons que : $\ell=1$.

Par l'absurde , supposons que $\ell\neq 1$; alors $0<\ell<1$ (car $0<\alpha_1\leq\ell\leq 1$, d'après 4-a).

Et comme h est continue sur $]0;1[$ (donc en ℓ) ; alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} h(\alpha_n)=h(\ell)$; ce qui est absurde ; Car $h(\alpha_n)=n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$.

D'où : $\ell=1$

d) Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=0$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=1$ et $(\alpha_n)^n=\dfrac{-\ln(\alpha_n)}{\sqrt{\alpha_n}}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-\ln(\alpha_n)}{\sqrt{\alpha_n}}$

La fonction $u: x\mapsto \dfrac{-\ln x}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1]$ donc en 1 , alors :

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{-\ln(\alpha_n)}{\sqrt{\alpha_n}}=\lim_{n\to+\infty}u(\alpha_n)=u(1)=0$$

Par suite : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=0}$

II- 1) Etudions le signe de l'intégrale : $\int_x^1 f(t)dt \quad \left(x\in\mathbb{R}_+^*\right)$

On a : •) Soit $0<x\leq 1$ et soit $t\in[x;1]$, alors $\ln t\leq 0$, d'où $f(t)\geq 0$

La fonction f étant continue sur $[x;1]$, donc $\int_x^1 f(t)dt\geq 0$

•) Soit $x\geq 1$ et soit $t\in[1;x]$, alors $\ln t\geq 0$, d'où $f(t)\leq 0$

La fonction f étant continue sur $[1;x]$, donc $\int_1^x f(t)dt\leq 0$, d'où $-\int_1^x f(t)dt\geq 0$

Alors $\int_x^1 f(t)dt\geq 0$

Conclusion

$(\forall x\in]0;+\infty[)$; $\int_x^1 f(t)dt>0$.

b) Montrons que pour $x\in]0;+\infty[$: $\int_x^1 f(t)dt=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x$.

Faisons une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u(t)=-\ln t & \to u'(t)=-\dfrac{1}{t} \\ v'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}} & \to v(t)=2\sqrt{t} \end{cases}$

U et v sont dérivables sur $]0;+\infty[$, u' et v' sont continues sur $]0;+\infty[$, donc :

$$\int_x^1 f(t)dt = \int_x^1 \frac{-\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$$

$$= \left[-2\sqrt{t}\ln(t)\right]_x^1 - \int_x^1 \left(-2\sqrt{t}\times\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= 2\sqrt{x}\ln(x) + 2\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$$

$$= 2\sqrt{x}\ln(x) + 2\left[2\sqrt{t}\right]_x^1$$

$$= 2\sqrt{x}\ln(x) + 2\left(2-2\sqrt{x}\right)$$

$$= 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\ln(x)$$

D'où : $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right)$; $\boxed{\int_x^1 f(t)dt = 4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x}$.

c) Soit S l'aire de le partie limitée par la courbe (C); l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e^2$.

Alors : $S=\int_1^{e^2}|f(x)|dx$ (u.a) $= -\int_{e^2}^1 -f(x)dx$ (u.a) $\left(\text{car } f(x)\le 0 \text{ sur } \left[1;e^2\right]\right)$, donc

$$S=\left[4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^{e^2} \text{ (u.a)}$$

$$=\left(4-4\sqrt{e^2}+2\sqrt{e^2}\ln e^2\right) \text{ (u.a)}$$

$$=\left(4-4e+4e\right) \text{ (u.a)}$$

$$=4cm^2$$

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; on pose : $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

a) f est continue et strictement décroissante sur $\left]0;1\right]$ et $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]\subset\left]0;1\right]$; donc f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$; d'où :

$$\frac{k}{n}\le x\le\frac{k+1}{n}\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le f(x)\le f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}dx\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)dx\le f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}dx$$

On a : •) $f\left(\frac{k+1}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}dx=\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k+1}{n}\right)=\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

•) $f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}dx=\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $1\le k\le n-1$; on a :

$$\boxed{\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)dx\le\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

b) D'après ce qui précède , on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; et $1\le k\le n-1$:

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \le \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ donc } \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \le \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et on a $f(1)=0$; donc :

•) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = U_n$

•) $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= U_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

•) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$ (Relation de Chasles)

On en déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $U_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \le \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \le U_n$

Donc : $U_n \le \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$ et $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \le U_n$

Alors : $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \le U_n \le \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$

c) D'après la question b) , on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \le U_n \le \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$

Et d'après (II-1-b), on a : pour $x \in \left]0;+\infty\right[$: $\int_x^1 f(t)dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\ln x$, donc :

$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx = 4 - \frac{4}{\sqrt{n}} - \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\frac{\ln(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = 0$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx = 4$

De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\frac{\ln(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = 0$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx = 4$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 4}$.

Exercice 6 :

g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{-t^2}dt$.

On pose : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $k(x)=\int_{1}^{x} e^{-t^2}dt$

1) a) Pour tout $x\in[0,+\infty[$; $g(x)=\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{-t^2}dt$

$$=-\int_{1}^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt$$

$$=-k\left(\sqrt{x}\right)$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $g(x)=-k\left(\sqrt{x}\right)$.

b) La fonction $u:t\mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$; donc la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$
$v:t\mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$; donc la fonction g est continue sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$.

c) pour tout $x\in]0;+\infty[$ on a : $g'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}k'\left(\sqrt{x}\right)=-\frac{e^{-\sqrt{x}^2}}{2\sqrt{x}}=-\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$

Donc : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $g'(x)<0$.

Par suite g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$; et comme elle est continue à droite en 0; alors g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

2) a) Montrons que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $\frac{g(x)-g(0)}{x}<-\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$

Soit $x\in]0;+\infty[$; g est continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$; d'après le théorème des accroissements finis : $(\exists c\in]0;x[)$: $\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(c)=-\frac{e^{-c}}{2\sqrt{c}}$

On a : $0<c<x \Rightarrow \begin{cases} 0<2\sqrt{c}<2\sqrt{x} \\ -x<-c \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{c}} \\ -x<-c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{c}} \\ e^{-x}<e^{-c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}<\frac{e^{-c}}{2\sqrt{c}}$$

$$\Rightarrow \frac{-e^{-c}}{2\sqrt{c}}<\frac{-e^{-x}}{2\sqrt{x}}$$

D'où : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $\frac{g(x)-g(0)}{x}<-\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$

b) On a : $\begin{cases} \left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right); \dfrac{g(x)-g(0)}{x} < -\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} = -\infty \end{cases}$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = -\infty$

D'où : g n'est pas dérivable à droite en 0 et la courbe de g admet une demi-tangente verticale à droite du point d'abscisse 0 dirigée vers le bas.