Exercice 01 : (03 points)

On considère la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$, Où $x\in[-1;1]$.

1)- Montrer que : $\left(\forall t\in[-1;1]\right);\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}=\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$.

2)- En déduire que : $\left(\forall x\in[-1;1]\right);S_n-Arc\tan x=(-1)^n.\int_0^x\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$.

3)- Justifier que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\left|S_n-Arc\tan x\right|\leq\dfrac{1}{2n+3}$, puis en déduire que la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente en précisant sa limite .

Exercice 02 : (06 points)

Soient f et F les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0)=\dfrac{-1}{2} \\ f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2};\text{si } x\neq 0 \end{cases} \quad et\ F(x)=\int_0^x\frac{t^3}{1+t}dt.$$

1)- a)- Montrer que : $\left(\forall x\in[0;+\infty[\right);0\leq F(x)\leq\dfrac{x^4}{4}$.

b)- Montrer que : $\left(\forall x\in]-1;0]\right);0\leq F(x)\leq\dfrac{x^4}{4(1+x)}$.

2)- En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^3}$.

3)- a)- Vérifier que : $\left(\forall t\in]-1;+\infty[\right);\dfrac{t^3}{1+t}=1-t+t^2-\dfrac{1}{1+t}$.

b)- En déduire que : $\left(\forall x\in]-1;+\infty[\right);\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-F(x)$.

4)- a)- Montrer que f est continue en $x_0=0$

b)- *Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$, puis donner une interprétation Géométrique du résultat obtenu .*

Exercice 03 : **(05 points)**

On considère la fonction F définie par : $F(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{(1+t)^2} dt$.

1)- a)- *Justifier que :* $D_F = \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$

b)- *Montrer que :* $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{e}; 1\right]\right); F(x) \le x\left(1 - \frac{1}{1+\ln x}\right)$ *et déduire* $\lim_{x \to \left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x)$.

2)- a)- *Montrer que :* $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[\right); F(x) = \frac{x}{(1+\ln x)^2} - 1 + 2.\int_0^{\ln x} \frac{e^t}{(1+t)^3} dt$.

b)- *En déduire que :* $\left(\forall x \in [1; +\infty[\right); F(x) \ge \frac{x}{(1+\ln x)^2} - 1$ *et calculer* $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

3)- *Montrer que F est dérivable sur D_F et que :* $\left(\forall x \in D_F\right); F'(x) = \frac{1}{(1+\ln x)^2}$

Puis dresser le tableau de variation de F .

Exercice 04 : **(06 points)**

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right); u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\, dx$.

1)- *Montrer que :* $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right); 0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$ *, puis déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

2)- *Prouver que :* $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right); u_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}.u_n$ *(On pourra utiliser une intégration Par parties).*

3)- *Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :* $F(x) = \int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\, dt$.

a)- *Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :* $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right); F'(x) = -|\sin x|.\sin x$.

b)- *En déduire que :* $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right); F(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi + \sin(2x)}{4}$ *, puis calculer La valeur de l'intégrale u_0.*

4)- a)- *Montrer que :* $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right); \frac{n+1}{n+4} \le \frac{u_{n+1}}{u_n} \le 1$*, puis déduire* $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

b)- *Calculer* u_1*, puis montrer par récurrence que :*

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);u_n.u_{n+1}=\frac{\pi}{2\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)}$$

c)- *Prouver que :* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}.u_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.