INTEGRATION (Partie 1)
Fonction Primitive

I. Primitive d'une fonction continue

1) Définition

Exemple :

On considère les fonctions suivantes :

$f : IR \to IR$ et $F : IR \to IR$

$x \mapsto 2x+3$ $\quad$ $x \mapsto x^2+3x-1$

On constate que $F'(x)=2x+3=f(x)$.

On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition :

f est une fonction continue sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$

Remarque :

Dans ces conditions, on a l'équivalence :

"F a pour dérivée f " et "f a pour primitive F ".

Exemple :

$F(x)=\dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x)=x$ car $F'(x)=f(x)$ pour tout réel x.

2) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x)=a$, $a \in IR$	$F(x)=ax$	IR
$f(x)=x^n$ $\quad n \geq 0$ entier	$F(x)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	IR
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $\quad n>1$ entier	$F(x)=-\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	IR
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$	IR
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$	IR

3) Linéarité des primitives

Propriété :

f et g sont deux fonctions continues sur [a ; b].

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur [a ; b] alors :

- $F+G$ est une primitive de $f+g$,
- kF est une primitive de kf avec k réel.

4) <u>Opérations et fonctions composées</u>

u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction	Une primitive	Conditions
$u'u^n$ $n \neq -1$ entier	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	$Si \ \ n<0, u(x)\neq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x)>0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x)>0$
$u'e^u$	e^u	
$u'\cos u$	$\sin u$	
$u'\sin u$	$-\cos u$	

<u>*Méthode*</u> *:*

Recherche de primitives

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x)=x^3-2x \ \ sur \ \ I = IR$

b) $f(x)=3x^2-\dfrac{3}{x^3} \ \ sur \ \ I = \left]0;+\infty\right[$

c) $f(x)=(2x-5)\left(x^2-5x+4\right)^2 \ \ sur \ \ I = IR$

d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \ \ sur \ \ I = IR$

e) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+2} \ \ sur \ \ I = IR$

f) $f(x)=xe^{x^2} \ \ sur \ \ I = IR$

g) $f(x)=\cos(2x)-3\sin(3x-1) \ \ sur \ \ I = IR$

<u>*Correction*</u>

a) $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^2$

b) $f(x)=3x^2-\dfrac{3}{x^3}=3x^2-3x^{-3} \qquad donc \ \ F(x)=x^3-3\times\dfrac{1}{-2}x^{-2}=x^3+\dfrac{3}{2x^2}$

c) $f(x)=(2x-5)\left(x^2-5x+4\right)^2 \qquad du \ type \ \ u'u^n \ \ avec \ \ u(x)=x^2-5x+4$

$donc \ \ F(x)=\dfrac{1}{3}\left(x^2-5x+4\right)^3$

d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad du \ type \ \ \dfrac{u'}{\sqrt{u}} \ \ avec \ \ u(x)=x^2+1$

$donc \ \ F(x)=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+1}$

e) $f(x)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2x}{x^2+2} \qquad du \ type \ \ \dfrac{u'}{u} \ \ avec \ \ u(x)=x^2+2$

$donc \ \ F(x)=\dfrac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right)$

f) $f(x)=xe^{x^2}=\dfrac{1}{2}\times 2xe^{x^2} \qquad du \ type \ \ u'e^u \ \ avec \ \ u(x)=x^2$

$donc \ \ F(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{2}\times 2\cos(2x)-3\sin(3x-1) \qquad donc \ \ F(x)=\dfrac{1}{2}\sin(2x)+\cos(3x-1)$

Propriété :
f est une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction $x \mapsto F(x)+C$ *est une primitive de f sur I.*
Exemple :

En reprenant l'exemple précédent, toute fonction de la forme $G_C(x)=\frac{x^2}{2}+C$ *, avec* $C \in \mathbb{R}$ *, est une primitive de f.*

Propriété :
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue.
Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ *ne possède pas de primitive sous forme explicite.*

Méthode :
Recherche d'une primitive particulière
Soit la fonction f définie sur IR^* *par* $f(x)=\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

1) Démontrer que la fonction F définie sur IR^* *par* $F(x)=\frac{e^{2x}}{x}$ *est une primitive de f.*
2) Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en x = 1.
1) La fonction F est une primitive de f si F' = f.

$$F'(x)=\frac{2e^{2x}x-e^{2x}}{x^2}=\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}=f(x).$$

2) Toutes les primitives de f sont de la forme : $G(x)=F(x)+C$ *où C est un nombre réel.*
On cherche la primitive de la fonction f qui s'annule en x = 1, soit : $G(1)=0$.
Donc $F(1)+C=0$

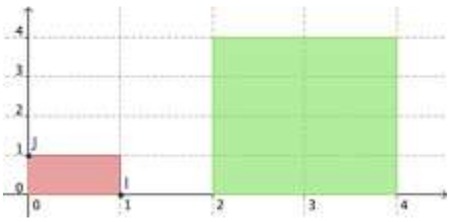
$$\frac{e^{2\times 1}}{1}+C=0$$

$$C=-e^2$$

La primitive de la fonction f qui s'annule en x = 1 est G telle que : $G(x)=F(x)-e^2=\frac{e^{2x}}{x}-e^2$

II. Intégrale et aire

1) Unité d'aire

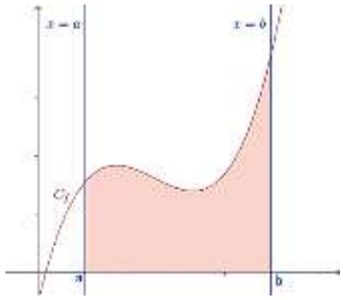


Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *;le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.*
L'aire du rectangle vert est égale 8 fois à l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 *par exemple).*

2) Définition

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b].
On appelle intégrale de f sur [a ; b] l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



3) Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a;b]$ se note : $\int_a^b f(x)\,dx$

Et on lit "intégrale de a à b de $f(x)dx$".

Remarques :
- a et b sont appelés les bornes d'intégration.
- x est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

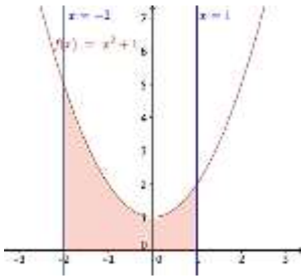
Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

" dx " ou " dt " nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[-2;1]$ et se note

$\int_{-2}^{1} \left(x^2 + 1\right) dx$.



Méthode :

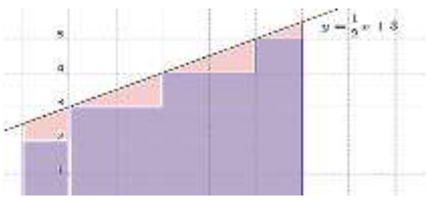
Déterminer une intégrale par calculs d'aire

a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$ dans un repère orthonormé.

b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$.

Correction

a)



b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=5$.

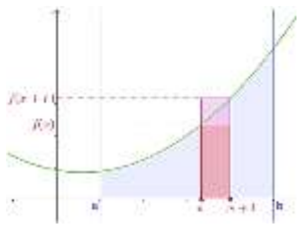
Donc par dénombrement, on obtient : $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 21\,u.a. + 3\,u.a. = 24\,u.a.$

4) <u>Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive</u>

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a;b]$.

On partage l'intervalle $[a;b]$ en n sous-intervalles de même amplitude

$l = \dfrac{b-a}{n}$.



Sur un sous-intervalle $[x\,;\,x+l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire l x $f(x)$;
- l'autre de dimension l et $f(x+l)$ qui a pour aire l x $f(x+l)$.

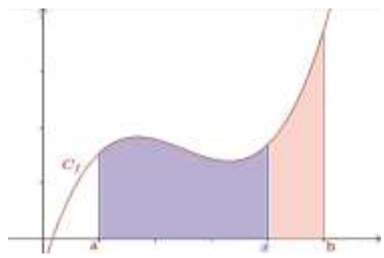
Sur l'intervalle $[a;b]$;l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".

5) <u>Fonction définie par une intégrale</u>

<u>Théorème</u> :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et sa dérivée est la fonction f.



<u>Méthode</u> :

Etudier une fonction définie par une intégrale

Soit F la fonction définie sur [0 ; 10] par $F(x)=\int_0^x \frac{t}{2}\,dt$.

a) Etudier les variations de F.

b) Tracer sa courbe représentative.

<u>Correction</u>

a) $t \mapsto \frac{t}{2}$ est continue et positive sur $[0;10]$ donc F est dérivable sur $[0;10]$ et $F'(x)=\frac{x}{2}>0$.

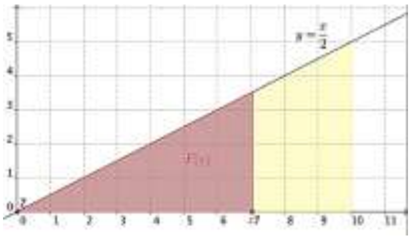
Donc F est croissante sur $[0;10]$.

On dresse le tableau de variations :

x	0	10
$F'(x)$	+	
$F(x)$	0 ↗	25

$F(x)$ est égal à l'aire du triangle rouge.

Ainsi $F(10)=\dfrac{10\times 5}{2}=25\,u.a.$



b) Pour tout x de $[0;10]$, *on a* $F(x)=\dfrac{x\times\dfrac{x}{2}}{2}=\dfrac{x^2}{4}$ *u.a.*

On a ainsi la représentation graphique de F :