GUESSMATHS

Revue n°1 : Chapitre « limites et continuité»

2éme Bac SC. Maths

Contenue du chapitre :

- Résumé du cours
- Exercices d'application
- Astuces et méthodes
- Série d'exercices corrigés

1er Conseil aux bacheliers afin de bien préparer leur Examen

Comme dit le proverbe français « rien ne se perd rien ne se crée tout se transforme »

Alors le secret de la réussite c'est de travailler régulièrement.

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com WhatsApp : 0717467136

LIMITES ET CONTINUITÉ

(Partie 1)

Continuité en un point

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a.

on dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Continuité à droite et à gauche

Définition :

1) soit f une fonction définie sur un intervalle $]b;a]$ ou

on dit que f est continue à droite en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

on dit que f est continue à gauche en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

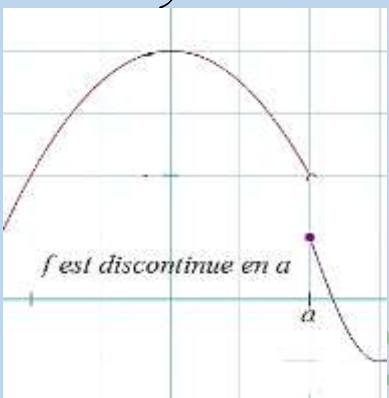
Propriété :

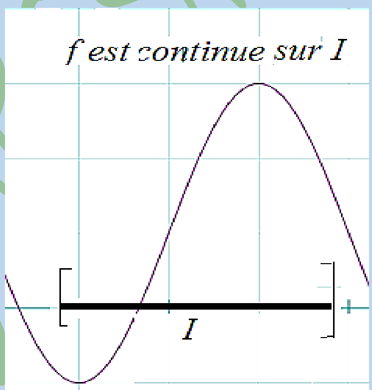
f est continue en a ssi f est continue à droite en a et continue à gauche en a.

Définitions :

1) on dit que f est continue sur l'intervalle ouvert I si elle est continue en tout point de I.

2) on dit que f est continue sur l'intervalle $[a;b]$ si f est continue sur $]a;b[$ et à droite en a et à gauche en b.





Propriétés :

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, cos, sin et tan sont continues sur leur domaine de définition.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $k \in IR$ alors :

1) les fonctions $f+g$, $k \times g$ $k \times f$, $f \times g$ et $|f|$ sont continues sur I.

2) si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

3) si $g \geq 0$ sur I alors $\sqrt{g}$ est continue sur I.

Prolongement d'une fonction par continuité

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert pointé de centre a mais non définie en a.

On dit que f admet un prolongement par continuité en a si f admet une limite finie l en a.

La fonction g définie sur $D_f \cup \{a\}$ par : $\begin{cases} g(x)=f(x) & \text{si } x \in D_f \setminus \{a\} \\ g(a)=l \end{cases}$

Est continue en a et s'appelle le prolongement par continuité de f en a.

Composée de fonctions continues :

Théorème1 :

1) si f est continue en a et g continue en $b=f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en en a.

2) si f est continue sur I et g continue sur J avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I.

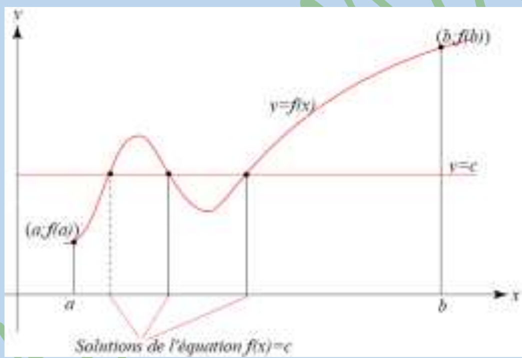
Théorème2 :

Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et g est continue en b alors : $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = g(b)$

Théorème des valeurs intermédiaires(T.V.I) :

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ .Pour tout nombre réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel k dans $[a;b]$ tel que : $f(k)=c$

Exemple :



Corollaire1 :

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ telle que : $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins un réel c dans $]a;b[$ tel que : $f(c)=0$

Corollaire 2 :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$ telle que : $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe un unique réel c dans $]a;b[$ tel que : $f(c)=0$

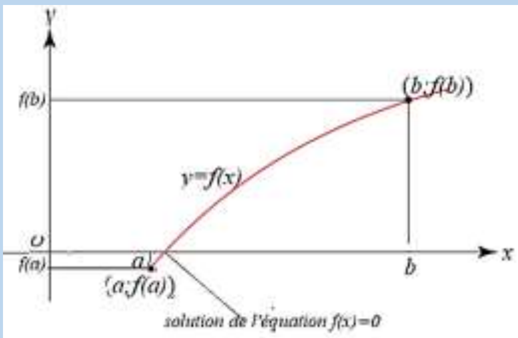


Image d'un intervalle par une fonction continue

Rappel :

- I un intervalle de IR ; $\forall(a,b)\in I^2 / a\le b \quad : [a,b]\subset I$
- $f(I)=\{f(x)/x\in I\}$ image de I par f.

Théorème :

- Si f est continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle de IR.

c.à.d. : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

- Si f est continue sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes

$f([a,b])=[m,M]$ Où $m=\min\limits_{[a,b]} f$ et $M=\max\limits_{[a,b]} f$

$(\exists x_1\in[a,b])/f(x_1)=m$ et $(\exists x_2\in[a,b])/f(x_2)=M$

Théorème de la bijection

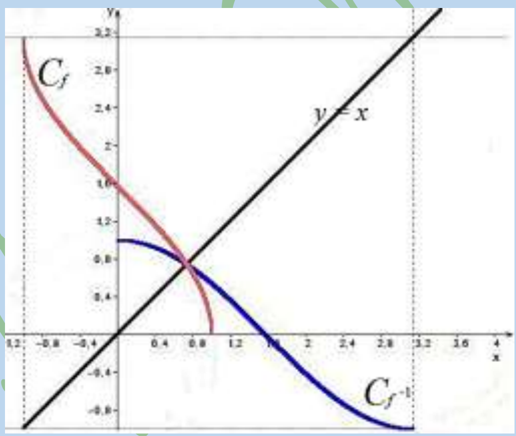
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ,alors :

1) $f(I)$ est un intervalle de même nature que I.

2) f est bijective de I vers $f(I)$

3) la bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$ de même monotonie que f.

4) les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $(\Delta): y=x$ appelée première bissectrice du repère



$(\forall x\in I)(\forall y\in f(I)) : f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

$(\forall x\in I) : f^{-1}\circ f(x)=x$ Et $(\forall y\in f(I)) : f\circ f^{-1}(y)=y$

Fonction arc tangente

Soit f la restriction de la fonction $x\mapsto \tan x$ à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $f\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)=IR$

Donc f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ vers IR .la bijection réciproque de f se note $\arctan$ et s'appelle la fonction arc tangente

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com WhatsApp : 0717467136

$\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)(\forall y \in IR): \tan x = y \Leftrightarrow \arctan y = x$

Conséquences :

1) la fonction arc tan est définie, continue et strictement croissante sur IR.

2) $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right): \arctan(\tan x) = x$; $(\forall x \in IR): \tan(\arctan x) = x$

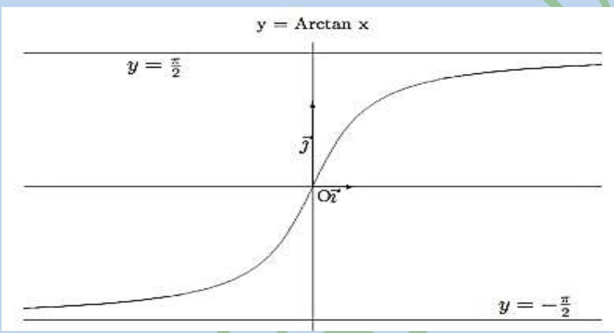
3) $(\forall x \in IR)(\forall y \in IR): \arctan x < \arctan y \Leftrightarrow x < y$

4) $(\forall x \in IR)(\forall y \in IR): \arctan x = \arctan y \Leftrightarrow x = y$

5) arctan est impaire

6) $\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

7) La courbe de l'arctan



Fonction racine $n^{ième}$

Soit $n \in IN^*$ et soit f la restriction de la fonction $x \mapsto x^n$ à IR

f est continue et strictement croissante sur IR^+ et $f(IR^+) = IR^+$ donc f est une bijection de IR^+ vers ; $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+): x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$

$\sqrt[1]{x} = x$; $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ Racine carré de x ; $\sqrt[3]{x}$ racine cubique de x ;

Conséquence :

1) la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie, continue et strictement croissante sur IR^+

2) $(\forall x \in \mathbb{R}^+): \sqrt[n]{x^n} = x$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^+): \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

3) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+): x < y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$

4) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+): x = y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$

5) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Équation : $x^n = y$ dans IR (discuter)

Si n est impair l'équation admet une seule solution

Si n est pair et $y > 0$ l'équation admet deux solutions $\sqrt[n]{y}$ et $-\sqrt[n]{y}$

Si n est pair et $y < 0$ l'équation n'admet pas de solutions.

Opérations sur les racines $n^{ième}$

$(\forall (a;b) \in IR_+^2)$; $(\forall (n;p) \in IN^{*2})$ on a :

1) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$ 2) $\sqrt[n]{a^p}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^p$ 3) $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$

4) $\sqrt[np]{a^p}=\sqrt[n]{a}$ 5) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Propriétés :

1) Si f est continue et positive sur I alors $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I.

2) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f}=+\infty$

3) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f=l\in\mathbb{R}^+$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f}=\sqrt[n]{l}$

Puissance rationnelle d'un réel positif (extension de la puissance entière)

Définition :

Soit $a\in\mathbb{R}^+$ et $r\in\mathbb{Q}^*$ on pose : $r=\dfrac{p}{q}$ avec $r\in\mathbb{Z}^*$ et $q\in\mathbb{N}^*$

Le réel positif $\sqrt[p]{a^q}$ se note a^r ou $a^{\frac{q}{p}}$

Remarque :

$(\forall x\in\mathbb{R}^+)(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

Opérations sur les puissances rationnelles

Propriétés :

Soient $(a;b)\in\mathbb{R}_+^2$ et $(r,r')\in\mathbb{Q}^2$ $(r;r')\in\mathbb{Q}_+^2$

1) $\left(a^r\right)^{r'}=a^{rr'}$ 2) $a^r\times a^{r'}=a^{r+r'}$ $a^{r+r'}=a^{r'}\times a^r$ 3) $a^r\times b^r=(ab)^r$ 4) $\dfrac{1}{a^r}=a^{-r}$

5) $\dfrac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$ $\dfrac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$ 6) $\dfrac{a^r}{b^r}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^r$

LIMITES ET CONTINUITE : Méthodes

1) Si on veut montrer que f est continue en a.
- On peut revenir à la définition : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

2) Si on veut montrer que f est prolongeable par continuité en a.
- On vérifie que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l\in\mathbb{R}$ et que $a\notin D_f$.

3) Si on veut montrer que f est continue sur intervalle ouvert I alors :
- On peut montrer que f est continue en tout point a de I.
- On peut utiliser les opérations sur la continuité.

On considère f en tant que Somme ; Produit ou Quotient de fonctions continues.

4) Si on veut prouver qu'une équation admet au moins une solution dans un intervalle $[a;b]$ alors :
- On peut penser à l'écrire sous la forme $f(x)=\lambda$ avec f continue sur $[a;b]$, λ une constante donnée puis vérifier que λ est une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$
- On peut aussi penser à l'écrire sous la forme $f(x)=0$ avec f continue sur $[a;b]$, puis vérifier que $f(a)\times f(b)<0$.

5) Si on veut montrer que f est une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J alors :

- On peut montrer que f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I, puis vérifier que $f(I)=J$.

6) Si on veut prouver qu'une équation admet une unique solution dans un intervalle I

- On peut penser à l'écrire sous la forme $f(x)=\lambda$ avec f continue et strictement monotone sur l'intervalle I, puis vérifier que $\lambda \in f(I)$.
- On peut aussi penser à l'écrire sous la forme $f(x)=0$ avec f continue et strictement monotone sur I, puis vérifier que $0 \in f(I)$.
- Si I est un segment, on peut penser au théorème des valeurs intermédiaires.

7) Si on veut prouver qu'une équation admet une unique solution dans l'intervalle I.

- On peut penser à l'écrire sous la forme $f(x)=\lambda$ avec f continue et strictement monotone sur l'intervalle I, puis vérifier que $\lambda \in f(I)$.
- On peut penser à l'écrire sous la forme $f(x)=0$ avec f continue et strictement monotone sur I, puis vérifier que $0 \in f(I)$.

8) Si on veut résoudre une équation de type $\arctan(x)=\lambda$

- Si $\lambda \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, alors $x=\tan(\lambda)$
- Si $\lambda \notin \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, alors l'équation n'admet pas de solution

Si on veut calculer la limite d'une expression contenant $\arctan(u(x))$ avec une forme indéterminée

- Si $\lim u(x)=0$, On peut poser $t=u(x)$ et utiliser $\lim_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t}=1$
- Si $\lim u(x)=+\infty$, On peut poser $t=u(x)$ et utilise $(\forall t>0)$; $\arctan t+\arctan\frac{1}{t}=\frac{\pi}{2}$
- Si $\lim u(x)=-\infty$, On peut poser $t=u(x)$ et utiliser

$(\forall t<0)$; $\arctan t+\arctan\frac{1}{t}=-\frac{\pi}{2}$

- Si $\lim u(x)=a\neq 0$, On peut poser $t=\arctan(u(x))$

10) Pour calculer la limite d'une fonction en x_0^- (respectivement en x_0^+)

- On peut d'abord simplifier son expression sur un ensemble du type $\left]x_0-\alpha;x_0\right[$ puis calculer la limite demandée (respectivement en $\left]x_0;x_0+\alpha\right[$)

<u>Exemple :</u>

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-E(x^2)}{x-E(x)}\ ;\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-E(x^2)}{x-E(x)}$$

Série d'exercices non Corrigés

Opérations

1.2. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

1.3. Calculer $\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$

1.4. Calculer $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$

1.5. Calculer $\lim_{x\to2}\frac{-2x^3+5x^2-4}{(x-2)^3(1-x)}$

1.6. Calculer $\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}$

Factorisation par le terme dominant

1.7. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$

1.8. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-6x+5\right)$

1.9. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+2}$

1.10. Calculer la limite de $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x+3}\right)$

Quantité conjuguée et taux de variation

1.11. Déterminer (par limite d'un taux d'accroissement) la dérivée de la fonction racine carrée.

1.12. Calculer $\lim_{x\to2}\left(\frac{1-x^2+3}{x-2}\right)$

1.13. Calculer $\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}{x-\pi}$

1.14. Calculer $\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{1-\cos\pi x}\right)$

1.15. Calculer $\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{1-\sin x}\right)$

Série d'exercices Corrigés

Exercice 1

I - Calculer $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}$

Correction de l'exercice 1

$0\le\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}<\arctan 1+\arctan 1=\frac{\pi}{2}$ et

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}\right)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\frac{7}{9}$$

Comme $\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}\right)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a donc $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}=\arctan\frac{7}{9}$.

De même $\left(\arctan\frac{7}{9}+\arctan\frac{1}{8}\right)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\arctan\frac{7}{9}+\arctan\frac{1}{8}\right)=\dfrac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}}=1$

et donc $\arctan\frac{7}{9}+\arctan\frac{1}{8}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

Finalement, $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

I - Calculer $u_n=\arctan\frac{2}{1^2}+\arctan\frac{2}{2^2}+....+\arctan\frac{2}{n^2}$ pour n entier naturel non nul donné puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Correction de l'exercice 2

(On va retrouver le résultat de l'exercice 2 dans un cas particulier)

Soient a et b deux réels positifs. Alors, $\arctan a\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan b\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et donc,

$\arctan a-\arctan b\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

De plus, $\tan(\arctan a-\arctan b)=\dfrac{\tan(\arctan a)-\tan(\arctan b)}{1+\tan(\arctan a)\times\tan(\arctan b)}=\dfrac{a-b}{1+ab}$, et

donc, puisque $\arctan a-\arctan b\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\forall a\ge 0\ ,\ \forall b\ge 0$,

$\arctan a-\arctan b=\arctan\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$.

Soit alors k un entier naturel non nul.

$$\arctan\frac{2}{k^2}=\arctan\left(\frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k+1)(k-1)}\right)$$
$$=\arctan(k+1)-\arctan(k-1) \quad \text{(Puisque } (k-1) \text{ et } (k+1) \text{ sont positifs).}$$

Par suite, si n est un entier naturel non nul donné,

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{k^2}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\arctan(k+1)-\arctan(k-1)\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\arctan(k+1)-\sum_{k=1}^{n}\arctan(k-1)$$
$$=\sum_{k=2}^{n+1}\arctan k-\sum_{k=0}^{n-1}\arctan k$$
$$=\arctan(n+1)+\arctan n-\arctan 0-\arctan 1$$
$$=\arctan(n+1)+\arctan(n)-\frac{\pi}{4}.$$

La limite de u_n vaut donc $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$. $\lim_{x\to\infty}u_n=\frac{3\pi}{4}$

Exercice 3

On considère la fonction numérique f telle que : $f(x)=(x^2-1)\arctan\frac{1}{2x-1}$, et on appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f ?
2. Exprimer sur $D\setminus\{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x)=2xg(x)$.

Où $g(x)=\arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right)-\frac{1}{2x}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$

3. Montrer que : $(\forall x\in IR)$, $2x^4-4x^3+9x^2-4x+1>0$ et en déduire le tableau de variation de g.
4. Dresser le tableau de variation de f.

Correction de l'exercice 3

1. f est définie et dérivable sur $D\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2. Pour x élément de D, $f'(x)=2x\arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right)+(x^2-1)\times\frac{-2}{(2x-1)^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{(2x-1)^2}}$

$$=2x\arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right)-\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$$
$$=2x\left(\arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right)-\frac{1}{2x}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}\right).$$

De plus, pour x non nul : $f'(x)=2xg(x)$ où $g(x)=\arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right)-\frac{1}{2x}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$.

3. $(\forall x\in IR)$; on a : $2x^4-4x^3+9x^2-4x+1=2x^4-4x^3+2x^2+7x^2-4x+1$

$$=2x^2(x-1)^2+7\left(\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{7}{49}-\frac{4}{49}\right)$$

$$=2x^2(x-1)^2+7\left(\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{3}{49}\right)$$

$$=2x^2(x-1)^2+7\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{3}{7}$$

Donc : $(\forall x\in IR)$; $2x^4-4x^3+9x^2-4x+1>0$

Pour x élément de $D\setminus\{0\}$, $g'(x)=\left(\frac{1}{2x-1}\right)'\times\frac{1}{1+\frac{1}{2x-1}}-\left(\frac{1}{2x}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}\right)'$

$$=\left(\frac{1}{2x-1}\right)'\times(\arctan)'\left(\frac{1}{2x-1}\right)-\left(\frac{1}{2x}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}\right)'$$

Calculons d'abord : $\left(\frac{1}{2x-1}\right)'\times\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2x-1}\right)^2}$; puis $\left(\frac{1}{2x}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}\right)'$

On a : $\left(\frac{1}{2x-1}\right)'\times\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2x-1}\right)^2}=\frac{-2}{(2x-1)^2}\times\frac{(2x-1)^2}{(2x-1)^2+1}$

$$=\frac{-2}{(2x-1)^2+1}$$

$$=\frac{-2}{4x^2-4x+2}=\frac{-1}{2x^2-2x+1}$$

On a : $\left(\frac{1}{2x}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}\right)'=-\frac{2}{4x^2}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}+\frac{1}{2x}\times\left(\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}\right)'$

$$=\frac{1}{2x}\left(-\frac{1}{x}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}+\frac{2x(2x^2-2x+1)-(x^2-1)(4x-2)}{(2x^2-2x+1)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2x(2x^2-2x+1)}\left(-\frac{x^2-1}{x}+\frac{4x^3-4x^2+2x-4x^3+2x^2+4x-2}{2x^2-2x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2x(2x^2-2x+1)}\left(-\frac{x^2-1}{x}+\frac{-2x^2+6x-2}{2x^2-2x+1}\right)$$

$$= \frac{-1}{2x\left(2x^2-2x+1\right)}\left(\frac{x^2-1}{x}+\frac{2x^2-6x+2}{2x^2-2x+1}\right)$$

$$= \frac{-1}{2x\left(2x^2-2x+1\right)}\left(\frac{x^2-1}{x}+\frac{2x^2-2x+1+1-4x}{2x^2-2x+1}\right)$$

$$= \frac{-1}{2x\left(2x^2-2x+1\right)}\left(\frac{x^2-1}{x}+1+\frac{1-4x}{2x^2-2x+1}\right)$$

$$= \frac{-1}{2x\left(2x^2-2x+1\right)}\left(\frac{x^2+x-1}{x}+\frac{1-4x}{2x^2-2x+1}\right)$$

$$= \frac{-1}{2x^2\left(2x^2-2x+1\right)^2}\left(\left(x^2+x-1\right)\left(2x^2-2x+1\right)+x\left(1-4x\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{2x^2\left(2x^2-2x+1\right)^2}\left(\left(x^2+x-1\right)\left(2x^2-2x+1\right)+x\left(1-4x\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{2x^2\left(2x^2-2x+1\right)^2}\left(2x^4-2x^3+x^2+2x^3-2x^2+x-2x^2+2x-1+x-4x^2\right)$$

$$= \frac{-1}{2x^2\left(2x^2-2x+1\right)^2}\left(2x^4-7x^2+4x-1\right)=\frac{-\left(2x^4-7x^2+4x-1\right)}{2x^2\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

D'où $\left(\frac{1}{2x}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}\right)'=\frac{-\left(2x^4-7x^2+4x-1\right)}{2x^2\left(2x^2-2x+1\right)^2}$

Donc $g'(x)=\frac{-1}{2x^2-2x+1}-\frac{-\left(2x^4-7x^2+4x-1\right)}{2x^2\left(2x^2-2x+1\right)^2}$

$$= \frac{1}{2x^2\left(2x^2-2x+1\right)^2}\left(-2x^2\left(2x^2-2x+1\right)+\left(2x^4-7x^2+4x-1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2x^2\left(2x^2-2x+1\right)^2}\left(-4x^4+4x^3-2x^2+2x^4-7x^2+4x-1\right)$$

$$= \frac{1}{2x^2\left(2x^2-2x+1\right)^2}\left(-2x^4+4x^3-9x^2+4x-1\right)$$

$$= \frac{-\left(2x^4-4x^3+9x^2-4x+1\right)}{2x^2\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

Et comme $2x^4-4x^3+9x^2-4x+1>0$; pour toute $x\in IR$.

Donc, g est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$, sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

En $+\infty$, g(x) tend vers 0. Donc g est strictement positive sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. Quand x tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures, g tend vers $-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}<0$ et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, g(x) tend vers $+\infty$.

Donc g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ en un certain réel x_0 de $\left]0;\frac{1}{2}\right[$

g est de plus strictement négative sur $\left]x_0;\frac{1}{2}\right[$ et strictement positive sur $]0;x_0[$.

Quand x tend vers $-\infty$, g(x) tend vers 0. Donc g est strictement négative sur $]-\infty;0[$.

Enfin, puisque $f'(x)=2xg(x)$ pour $x\neq 0$, on a les résultats suivants : sur $]-\infty;0[$, $f'(x)>0$, sur $]0;x_0[$, $f'(x)>0$, sur $\left]x_0;\frac{1}{2}\right[$,$f'(x)<0$, sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f'(x)>0$.

Comme $f'(0)=1>0$, on a donc : sur $]-\infty;x_0[$,$f'(x)>0$, sur $\left]x_0;\frac{1}{2}\right[$; $f'(x)<0$ et sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$,$f'(x)>0$. f est strictement croissante sur $]-\infty;x_0[$ et sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et est strictement décroissante sur $\left]x_0;\frac{1}{2}\right[$

Exercice 4

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{\sin x}{1+\sin x}$.

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Quel est le domaine de définition de f? Vérifier que f est 2π-périodique.
2) Comparer $f(\pi-x)$ et $f(x)$. Que dire sur Γ?
3) Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, puis déterminer la limite de f en $-\frac{\pi}{2}$.
4) Construire Γ à l'aide des renseignements précédents.

Correction de l'exercice 4

f est défini partout où le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire pour tous les réels x avec $\sin x\neq -1$.

Le domaine de définition de f est donc $Df=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

De plus, la 2π-périodicité de la fonction sin entraîne facilement la 2π-périodicité de f.

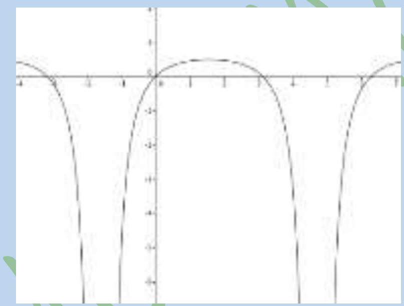
De $\sin(\pi-x)=\sin x$, on déduit que $f(\pi-x)=f(x)$. Ceci signifie que la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de Γ.

Posons $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ et $h(x)=\sin x$. On a $f=g\circ h$; De plus, h est croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ dont l'image est $]-1;1]$. La fonction g est croissante sur l'intervalle $]-1;1]$ (par exemple, on peut écrire $g(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$. Par composition, f est croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On a $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\sin x=-1^+$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=-\infty$ .Ainsi, par composition de limites $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$.

On construit d'abord Γ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. On la déduit sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ par symétrie d'axe $x=\dfrac{\pi}{2}$. Enfin, on l'obtient sur $\mathbb{R}$ par périodicité de période 2π, et donc par des translations de vecteur $k2\pi\vec{i}$, $k\in\mathbb{Z}$.

On obtient :



Exercice 5

Démontrer que, pour tout $t\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$, on a $\dfrac{1-\cos t}{\sin t}=\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

En déduire une forme simplifiée de $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$, pour $x\neq0$.

Correction de l'exercice 5

On utilise simplement la formule $\cos(2u)=1-2\sin^2u$ qui donne ici $1-\cos t=2\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$ et $\sin t=2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

Puisque $\tan$ réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, on peut poser $x=\tan(t)$; avec $t\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On a : $\sqrt{1+x^2}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2t}}=\dfrac{1}{|\cos t|}=\dfrac{1}{\cos t}$

car le cosinus est positif sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

On en déduit que : $\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\frac{1-\cos t}{\sin t}=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

Or $\frac{t}{2}\in\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$, et donc $\arctan\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)=\frac{t}{2}$.

On en déduit finalement que : $\arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)=\frac{t}{2}=\frac{\arctan x}{2}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sin x-x^2$

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution c dans $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$.

2) En déduire que l'équation $\cos x-2x=0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Correction :

1) $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)=\sin x-x^2$

Les fonctions $x\mapsto\sin x$ et $x\mapsto -x^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

Alors f est continue sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, et on a : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi^2}{16}=\frac{8\sqrt{2}-\pi^2}{16}$

Donc $f\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$ $\left(\pi^2\simeq 9{,}8 \text{ et } 8\sqrt{2}\simeq 11{,}3\right)$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi^2}{4}=\frac{4-\pi^2}{4}$

Donc : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$; alors $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\times f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$

Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\left(\exists c\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\right);f(c)=0$

Donc : l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution c dans $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$

Les fonctions $x\mapsto\sin x$ et $x\mapsto -x^2$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $[0;c]$ et dérivable sur $]0;c[$.

De plus $f(0)=f(c)=0$

Donc d'après le théorème de Rolle : $(\exists\alpha\in]0;c[)/f'(c)=0$

D'où : $(\exists\alpha\in]0;c[)/\cos c-2c=0$

Alors l'équation $\cos x-2x=0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\frac{\pi}{2}-\sin x$.

1) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$.

2) En déduire que pour tout x de $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$: $|f(x)-\alpha|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}|x-\alpha|$

Correction :

1) Soit $g(x)=f(x)-x$

Les fonctions f et $x\mapsto -x$ sont continues et dérivables sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ donc g est continue sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$.

Et pour tout $x\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $g'(x)=f'(x)-1=-\cos x-1$

D'où : $g'(x)=-(1+\cos x)$

Or $\cos x\geq -1$, donc $1+\cos x\geq 0$

D'où : $g'(x)\leq 0$

Alors g est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$; de plus : $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}$

$\pi>\frac{3}{2}$, donc $\frac{\pi}{3}>\frac{1}{2}$, d'où $g\left(\frac{\pi}{6}\right)>0$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{2}$, alors : $g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

Donc : $g\left(\frac{\pi}{6}\right)\times g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ d'où : l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

2) On a f est continue et dérivable sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$, et pour tout $x\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$;

$f'(x)=-\cos x$

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ et $x\mapsto\cos x$ est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\frac{\pi}{2}\leq\cos x\leq\cos\frac{\pi}{6}$

D'où : $0\leq\cos x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le f'(x) \le 0$

Donc : $|f'(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

On a alors : f est continue et dérivable sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

Et $\left(\forall x \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[\right)$, $|f'(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

Don d'après l'inégalité des accroissements finis :

$\forall (x;y) \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]^2 : |f(x)-f(y)| \le \frac{\sqrt{3}}{2}|x-y|$

Et comme $f(\alpha)=\alpha$ et $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

D'où : $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]\right) : |f(x)-f(\alpha)| \le \frac{\sqrt{3}}{2}|x-\alpha|$

Exercice 8

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$ telle que : $(\forall x \in]a;b[) / g'(x) \ne 0$

1) Montrer que : $g(a) \ne g(b)$

2) Montrer que : $(\exists c \in]a;b[) / \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

3) On suppose que : $f(a)=g(a)=0$

Montrer que : $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

4) En déduire : $\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{3}}$; $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctan} x - x}{x^3}$

Correction :

1) Montrons que $g(a) \ne g(b)$

Par l'absurde, supposons que $g(a)=g(b)$

Et comme g est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, alors d'après le théorème de Rolle : $\exists c \in]a;b[: g'(c)=0$ ce qui contredit le fait que $(\forall x \in]a;b[) / g'(x) \ne 0$

donc : $g(a) \ne g(b)$

2) Montrons que : $(\exists c \in]a;b[) / \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Considérons la fonction h définie sur $[a;b]$

par : $h(t)=(f(b)-f(a))g(t)-(g(b)-g(a))f(t)$

On a : f et g sont continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$.

Alors h est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.

Et on a : $h(a)=(f(b)-f(a))g(a)-(g(b)-g(a))f(a)$

$$=f(b)g(a)-f(a)g(b)$$

Et $h(b)=(f(b)-f(a))g(b)-(g(b)-g(a))f(b)$

$$=-f(a)g(b)+f(b)g(a)$$

$$=f(b)g(a)-f(a)g(b)$$

Donc : $h(a)=h(b)$

Et d'après le théorème de Rolle, on a : $\exists c\in]a;b[:h'(c)=0$

D'où $\exists c\in]a;b[/(f(b)-f(a))g'(c)-(g(b)-g(a))f'(c)=0$

Et comme $g(a)\neq g(b)$ et $g'(c)\neq 0$

Alors : $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

3) On suppose que $f(a)=g(a)=0$

Montrons que $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

D'après la question (2), on a : $(\exists c\in]a;b[)/\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Et comme $f(a)=g(a)=0$, alors : $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

$(\exists c\in]a;b[)/\dfrac{f(b)}{g(b)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Soit $x\in]a;b[$, alors f et g sont continues sur $[a;x]$ et dérivables sur $]a;x[$

Et $(\forall t\in]a;x[)$; $g'(t)\neq 0$

Donc $(\exists c_x\in]a;x[)/\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$

$a<c_x<x$, donc quand $x\to a^+$, on a : $c_x\to a^+$, alors : $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{c_x\to a^+}\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$

$$=\lim_{t\to a^+}\frac{f'(t)}{g'(t)}\quad (t=c)$$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

4) • Calculons $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+}\dfrac{\operatorname{Arctan}x-\frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{3}}$

Soient $f(x)=\arctan x-\dfrac{\pi}{3}$ et $g(x)=x-\sqrt{3}$

On a f et g sont continues et dérivables sur IR, pour tout $x\in IR$: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

Et $g'(x)=1$; donc : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g'(x)\neq 0$

Et on a $f(\sqrt{3})=g(\sqrt{3})=0$

Alors $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

D'où : $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+}\dfrac{\arctan x-\frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+}\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{4}$

• Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{Arctan}x-x}{x^3}$

Soient $f(x)=\tan x-x$ et $g(x)=x^3$

On a f et g sont continues et dérivables sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc f et g sont continues sur $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ et dérivables sur $\left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[$.

et $\forall x\in\left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[$; $f'(x)=\tan^2 x$ et $g'(x)=3x^2$, donc $\left(\forall x\in\left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[\right)$; $g'(x)\neq 0$

et on a : $f(0)=g(0)=0$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{3}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}$$

Exercice 9 :

Soit f une fonction deux fois dérivables sur IR telles que : $\begin{cases}f(0)=0, f'(0)=0\\(\exists\alpha>0): f'\left(\dfrac{a}{2}\right)f'(a)<0\end{cases}$

Montrer que : $(\exists\alpha\in]0;+\infty[): f''(\alpha)=0$

Correction :

On a f est deux fois dérivables sur IR, donc f' est dérivable sur IR, d'où f' est continue

Et on a : $f'\left(\frac{a}{2}\right)\times f'(0)<0$

Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\left(\exists c\in \left]\frac{a}{2};a\right[\right):\ f'(c)=0$

On a alors : $f'(c)=0$ et $f'(0)=0$

Donc : $f'(0)=f'(c)=0$

Et comme f' est continue sur $[0;c]$ et dérivable sur $]0;c[$

Alors, d'après le théorème de Rolle : $(\exists\alpha\in]0;c[):(f')'(\alpha)=0$

D'où : $(\exists\alpha\in]0;+\infty[)/f''(\alpha)=0$

Exercice 10 :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a;b]\ (a<b)$ telles que : $f(a)=f(b)=0$ et soit $x_0\in]a;b[$

Montrer que : $(\exists c\in]a;b[)/f''(c)=\frac{2f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$

Correction :

Pour $x_0\in]a;b[$ Montrons que : $(\exists c\in]a;b[)/f''(c)=\frac{2f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$

On considère la fonction g définie sur $[a;b]$ par :

$$g(t)=f(t)-\frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}(t-a)(t-b)$$

On a $g(a)=f(a)-\frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}(a-a)(a-b)$; donc $g(a)=f(a)$

Et $g(b)=f(b)$

Et comme $f(a)=f(b)=0$

Alors $g(a)=g(b)=0$

Et $g(x_0)=f(x_0)-f(x_0)=0$

Alors $g(x_0)=g(a)=0$

Et on a f et $t\mapsto(t-a)(t-b)$ sont continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$

Alors g est continue sur $[a;b]$ et dérivable

Sur $]a;b[$, ainsi g est continue sur $[a;x_0]$

Et sur $[x_0;b]$, et g est dérivable sur $]a;x_0[$ et sur $]x_0;b[$

Et d'après le théorème de Rolle :

$(\exists\alpha\in]a;x_0[)/g'(\alpha)=0$

$(\exists\beta\in]x_0;b[):g'(\beta)=0\ (\exists\beta\in]x_0;b[)/g'(\beta)=0$

Donc : $g'(\alpha)=g'(\beta)=0$

Et comme g' est continue sur $[\alpha;\beta]$

Et dérivable sur $]\alpha;\beta[$

Alors d'après le théorème de Rolle : $\exists c\in]\alpha;\beta[:(g')'(c)=0$

D'où : $\exists c\in]a;b[:g''(c)=0$

Série n° 2 d'exercices corrigés

NIVEAU 1

EXERCICE 1 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-3x^2+4x+4}{x^2-5x+6}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9-x^2}-3}{x^2}$ 3) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\dfrac{-x+5}{x^2+3x+2}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{2x^2+1}$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+4x^2}+4x$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x}-2x$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-E(x)}$ 8) $\lim\limits_{x\to0}7x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos3x)\tan(2x)}{x^3}$ 10) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-2(3-2x)^4}{x^2-1}$ 11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$

12) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{mx^2-(m+1)x+1}{x^2-3x+2}$ où m est un paramètre réel .

CORRECTION:

1) On a : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-3x^2+4x+4}{x^2-5x+6}\to\left(\dfrac{0}{0}\ \text{F.I}\right)$

Donc 2 est racine des deux polynômes $(-3x^2+4x+4)$ et (x^2-5x+6) , d'où ils sont divisibles par $(x-2)$.

On a : $(x^2-5x+6)=(x-2)(x-3)$

$(-3x^2+4x+4)=(x-2)(-3x-2)$

Et on obtient :

$$\lim_{x\to2}\frac{-3x^2+4x+4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(-3x-2)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to2}\left(-\frac{3x+2}{x-3}\right)=8$$

2) Pour tout $x\in]-1,1[-\{0\}$, on a :

$$\frac{\sqrt{9-x^2}-3}{x^2}=\frac{\left(\sqrt{9-x^2}-3\right)\left(\sqrt{9-x^2}+3\right)}{x^2\left(\sqrt{9-x^2}+3\right)}$$

$$=\frac{\cancel{9}-\cancel{x^2}-\cancel{9}}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{9-x^2}+3\right)}$$

$$=-\frac{1}{\left(\sqrt{9-x^2}+3\right)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{9-x^2}-3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-1}{\left(\sqrt{9-x^2}+3\right)}\right)=-\frac{1}{6}$

3) On a : $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{-x+5}{x^2+3x+2}=-\infty$ car :

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} x^2+3x+2=0^-$

4) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{2x^2+1}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=-\infty$$

5) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+4x^2}+4x\to+\infty+(-\infty)$ F.I

Pour tout $x<0$:

$$\sqrt{1+4x^2}+4x=-2x\sqrt{\frac{1}{4x^2}+1}+4x$$

$$=2x\left(2-\sqrt{\frac{1}{4x^2}+1}\right)$$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+4x^2}+4x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x\left(2-\sqrt{\frac{1}{4x^2}+1}\right)\right]=-\infty$

6) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x}-2x\to+\infty+(-\infty)$ F.I

Pour tout $x>0$, On a :

$$\sqrt{4x^2+3x}-2x=\frac{4x^2+3x-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}$$

$$=\frac{3x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2}=\frac{3}{4}$

7) On a : $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-E(x)}=\lim\limits_{x\to3^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

Soit $x\in\,]3,4[$; On a : $E(x)=3$ Donc :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-E(x)}=\lim\limits_{x\to3^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$

8) Calcule de $\lim\limits_{x\to0} 7x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, On a : $-1\le 1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$

Donc $0\le 1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\le 2$

D'où $7x^2\le 7x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\le 14x^2$

Et comme $\lim\limits_{x\to0} 7x^2=\lim\limits_{x\to0}14x^2=0$

Alors, d'après le théorème des encadrements, on obtient : $\lim\limits_{x\to0} 7x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$

9) On a :

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 3x)\tan(2x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\times\frac{\tan(2x)}{2x}\times18\right)$$

Car : $\lim\limits_{X\to0}\frac{1-\cos X}{X^2}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{X\to0}\frac{\tan X}{X}=1$

$$=18\times\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\times\frac{\tan 2x}{2x}\right)=18\times\frac{1}{2}\times1=9$$

10) Pour calculer $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+2}-2(3-2x)^4}{x^2-1}$; on peut procéder de deux méthodes différentes :

<u>1ère méthode :</u>

On considère la fonction : $u:x\to\sqrt{2x+2}-2(3-2x)^4$ On a u est dérivable en 1, donc :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+2}-2(3-2x)^4}{x-1}=u'(1)$$

$$u'(x)=\left(\sqrt{2x+2}-2(3-2x)^4\right)'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x+2}}+16(3-2x)^3$$

Alors, $u'(1)=\frac{33}{2}$ et $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$, donc :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+2}-2(3-2x)^4}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\frac{\sqrt{2x+2}-2(3-2x)^4}{x-1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{33}{2}\right)=\frac{33}{4}$$

<u>2ème méthode :</u> Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$, on a :

$$\frac{\sqrt{2x+2}-2(3-2x)^4}{x^2-1}=\frac{\sqrt{2x+2}-2+2-2(3-2x)^4}{x^2-1}$$

$$=\frac{\sqrt{2x+2}-2}{x^2-1}+\frac{2\left(1-(3-2x)^4\right)}{x^2-1}$$

$$=\frac{2}{(x+1)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}+\frac{8(2-x)\left(1+(3-2x)^2\right)}{x+1}$$

On a : $\lim\limits_{x\to1}\frac{2}{(x+1)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}=\frac{1}{4}$

et $\lim_{x\to 1}\frac{8(2-x)\left(1+(3-2x)^2\right)}{x+1}=8$

Donc : $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+2}-2(3-2x)^4}{x^2-1}=\frac{1}{4}+8=\frac{33}{4}$

11) On a : $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$

On considère la fonction $u : x\to\sin x-\cos x$

On a u est dérivable en $\frac{\pi}{4}$, donc :

D'où : $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\frac{\pi}{4}}=u'\left(\frac{\pi}{4}\right)$; et On a : $u'(x)=\cos x+\sin x$; Donc : $u'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

D'où $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$

12) $\lim_{x\to 1}\frac{mx^2-(m+1)x+1}{x^2-3x+2}\to\left(\frac{0}{0}\ \text{F.I}\right)$

On a : $mx^2-(m+1)x+1=(x-1)(mx-1)$ et $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

Donc : $\lim_{x\to 1}\frac{mx^2-(m+1)x+1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{mx-1}{x-2}\right)$
$=(1-m)$

EXERCICE 3 :

Étudier la continuité de f en x_0, dans chacun des cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x)=\frac{3x^2+4x+1}{x+1} ; x\neq -1 \\ f(-1)=-2 \end{cases}$ $x_0=-1$

2) $\begin{cases} f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x^3-1} ; x<1 \\ f(x)=\frac{2}{x}-x \quad ; x\geq 1 \end{cases}$ $x_0=1$

3) $\begin{cases} f(x)=\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} ; x<1 \\ f(x)=x^2+7x-8 \ ; \ x\geq 1 \end{cases}$ $x_0=1$

CORRECTION :

1/ Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{3x^2+4x+1}{x+1} ; x\neq -1 \\ f(-1)=-2 \end{cases}$

Calculons $\lim_{x\to -1} f(x)$

On a : $3x^2+4x+1=(x+1)(3x+1)$

Donc : $\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(3x+1)=-2$

D'où $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$

Donc la fonction f est continue en -1.

2/ Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^3-1} & ; x<1 \\ f(x)=\dfrac{2}{x}-x & ; x\geq 1 \end{cases}$

On a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3-1}\to F.I\left(\dfrac{0}{0}\right)$

On a $f(1)=\dfrac{2}{1}-1=1$

Calculons : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

On a : $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

Et $2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2x^2-x-1}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\right)=1$

D'où $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$

Et on a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{x}-x=1$

Donc, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

On conclut que f est continue en 1.

3/ f est définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} ; x<1 \\ f(x)=x^2+7x-8 \; ; \; x\geq 1 \end{cases}$

On a $f(1)=0$

On a : $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}\right)\to F.I\left(\dfrac{0}{0}\right)$

on a : $x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)^2(x+1)$ Et $x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x-1)(x+1)^2$

On obtient : $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x+1}=0$

D'où $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$

Et on a : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2+7x-8=0$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

Et par suite f est continue en 1.

EXERCICE 4 :

Soit f une fonction continue en 0 et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right) \; : \; f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

CORRECTION :

Soit $x_0\in\mathbb{R}$ montrons que : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

On pose : $h=x-x_0$ alors $x=h+x_0$

quand $x\to x_0$ on a $h\to 0$, donc :

$$= \lim_{h\to 0}\left(f(h) + f(x_0) - h\times x_0 \right)$$

Or f *est continue en 0 ; donc* $\lim_{h\to 0} f(x) = f(0)$

D'où : $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(0) + f(x_0) - 0\times x_0$

$$= f(0 + x_0)$$

$$= f(x_0)$$

On conclue que f est continue en x_0 *et par suite f est continue sur* $\mathbb{R}$.

EXERCICE 5 :

Soit f *la fonction définie par :* $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{|x^2 + x - 6|}}$

1) *Déterminer le domaine de définition de* f

2) *Montrer que f admet un prolongement par continuité en* -3, *que l'on déterminera .*

CORRECTION :

1/ $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{|x^2 + x - 6|}}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 6 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} / (x+3)(x-2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} / x \neq -3 \text{ et } x \neq 2$$

Donc : $D_f =]-\infty;-3[\cup]-3;2[\cup]2;+\infty[$

2/ *Tableau de signe de* $(x^2 + x - 6)$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
(x^2+x-6)		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\sqrt{x^2 + x - 6}}{x^2 + x - 6}$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\left(\sqrt{x^2 + x - 6}\right)}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x - 6}\right)}{x-2} = 0$$

Et , on a : $\lim_{x\to (-3)^+} f(x) = \lim_{x\to (-3)^+} \dfrac{x+3}{\sqrt{-x^2 - x + 6}}$

$$= \frac{(x+3)\sqrt{-x^2 - x + 6}}{-x^2 - x + 6}$$

$$= \frac{(x+3)\left(\sqrt{-x^2 - x + 6}\right)}{(x+3)(-x+2)}$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{-x^2 - x + 6}\right)}{x-2} = 0$$

D'où $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 0$

Donc $-3 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 0$

Alors, f admet donc un prolongement par continuité g en -3 définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & si\ x \neq -3 \\ g(-3) = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 7 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

CORRECTION :

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

Etudions la continuité de f sur $\mathbb{R}$. On sait que la fonction $x \to E(x)$ est continue sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $x \to x$ est continue sur $\mathbb{R}$; donc $x \to (x - E(x))^2$ est continue sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$; d'où f est continue sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Etudions la continuité de f sur $\mathbb{Z}$:

Soit $x_0 \in \mathbb{Z}$: alors $\forall x \in]x_0; x_0+1[$ $E(x) = x_0$ et $f(x) = x_0 + (x - x_0)^2$

Ainsi : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \left(E(x) + (x - E(x))^2\right)$

$$= x_0 + (x_0 - x_0)^2 = x_0$$

Et $f(x_0) = x_0$ donc $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ainsi f est continue à droite en x_0 .

Et on a : $\forall x \in]x_0 - 1; x_0[$ $E(x) = x_0 - 1$

Ainsi : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \left(E(x) + (x - E(x))^2\right)$

$$= \lim_{x \to x_0^-} \left(x_0 - 1 + (x - x_0 + 1)^2\right)$$

$$= x_0 - 1 + (x_0 - (x_0 - 1))^2$$

$$= x_0 - 1 + 1$$

$$= x_0$$

$\forall x_0 \in \mathbb{Z}$: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ et par suite f est continue sur $\mathbb{Z}$.

On conclut que f est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 8 :

Montrons que :

$$(\exists \alpha \in \mathbb{R}) \quad (\forall x \in [-1,1]) \quad \sqrt{1+x} \leq (1+x^2)\alpha + x$$

CORRECTION :

Pour tout $x \in [-1,1]$

$$\sqrt{1+x} \le (1+x^2)\alpha + x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} - x \le (1+x^2)\alpha$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+x}-x}{1+x^2} \le \alpha$$

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-x}{1+x^2}$. *On a* $D_f = [-1;+\infty[$

$x \to 1+x$ *est continue et positive sur* $[-1;+\infty[$ *Donc* $x \to \sqrt{1+x}$ *est continue sur* $[-1;+\infty[$ *et* $x \to -x$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *, en particulier sur* $[-1;+\infty[$

Donc : $x \to \sqrt{1+x} - x$ *est continue sur* $[-1;+\infty[$ *et* $x \to 1+x^2$ *est continue sur* $[-1;+\infty[$ *et* $(\forall x \in [-1;+\infty[) : 1+x^2 \neq 0$, *par suite* f *est continue sur* $[-1;+\infty[$ *en particulier sur* $[-1,1]$

On déduit que $(\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2)$ $f([-1,1]) = [m,M]$

Car f est continue sur $[-1,1]$ *donc l'image d'un segment est un segment.*

Cà d : $(\forall x \in [-1;+\infty[)(\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2) / m \le f(x) \le M$

On pose $\alpha = M$ *; alors on obtient :*

$$(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in [-1,1]) : \frac{\sqrt{1+x}-x}{1+x^2} \le \alpha$$

Donc $(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in [-1,1]) / (\sqrt{1+x}) \le (1+x)\alpha + x$

EXERCICE 9 :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$

Montrer que : $\exists c \in]a,b[$ $f(c) = \dfrac{1}{a-c} + \dfrac{1}{b-c}$.

CORRECTION :

f st continue sur $[a,b]$

Montrons que : $(\exists c \in]a,b[) / f(c) = \dfrac{1}{a-c} + \dfrac{1}{b-c}$

$$f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} \Leftrightarrow f(c) = \frac{a+b-2c}{(a-c)(b-c)}$$
$$\Leftrightarrow (a-c)(b-c)f(c) - a - b + 2c = 0$$

Soit g *la fonction définie par :*

$(\forall x \in [a,b]) : g(x) = (a-x)(b-x)f(x) - a - b + 2x$ *Les fonctions* h *,* $x \mapsto (a-x)(b-x)$ *et* $x \to -a-b+2x$ *sont continues sur* $[a,b]$ *, donc g est continue sur* $[a,b]$.

Et on a : $g(a) = -a-b+2a = a-b$, *donc* $g(a) < 0$ *(car* $a<b$ *)*

Et : $g(b) = -a-b+2b = b-a$, *donc* $g(b) > 0$

On a ,alors g *est continue sur* $[a,b]$ *et* $g(a) \times g(b) < 0$ *donc d'après le T.V.I*

$(\exists c \in]a,b[) :$ $g(c) = 0$

D'où $(\exists c \in]a,b[) :$ $f(c) = \dfrac{1}{a-c} + \dfrac{1}{b-c}$

EXERCICE 10 :

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que : $f(0)=0$ et $f(1)=4$

Montrer que : $\exists\alpha\in[0,1]\quad f(\alpha+\frac{1}{2})=2+f(\alpha)$

CORRECTION :

On considère la fonction g définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ par : $g(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f(x)-2$

Soit $h:x\to x+\frac{1}{2}$

On a h est continue sur $\mathbb{R}$; en particulier sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et h est croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$; donc :

$h\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)=\left[h(0),h\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\frac{1}{2},1\right]\subset[0,1]$

Et f est continue sur $[0,1]$ donc : $(f\circ h)$ est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, alors : g est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, et on a :

$$\begin{cases} g(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)-2=f\left(\frac{1}{2}\right)-2 \\ g\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)-2=2-f\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Alors : $g(0)\times g\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(f\left(\frac{1}{2}\right)-2\right)^2\leq 0$, et d'après le T.V.I $\left(\exists\alpha\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)$: $g(\alpha)=0$

On a : $\left[0;\frac{1}{2}\right]\subset[0;1]$, d'où : $(\exists\alpha\in[0;1])$: $f\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=2+f(\alpha)$

EXERCICE 11 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $(\exists a\in\mathbb{R})\quad f\circ f(a)=a$

Montrer que : $\exists c\in\mathbb{R}\quad / \; f(c)=c$

CORRECTION :

f est continue sur $\mathbb{R}$ / $(\exists a\in\mathbb{R})(f o f)(a)=a$

Montrons que : $(\exists c\in\mathbb{R})/\; f(c)=c$

On considère la fonction g définie par : $g(x)=f(x)-x$. g est continue sur $\mathbb{R}$ (Somme de deux fonctions continues) en particulier sur le segment I de bornes a et $f(a)$

$$\begin{cases} g(a)=f(a)-a \\ g(f(a))=f(f(a))-f(a)=a-f(a) \end{cases}$$

Donc : $g(a)\times g(f(a))=-(a-f(a))^2\leq 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires $(\exists c\in I)$: $g(c)=0$ d'où $(\exists c\in\mathbb{R}): f(c)=c$

EXERCICE 12 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{x+1}$

1) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$

2) Montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

3) Montrer que l'équation $f(x)=1$, admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$ et que $2<\alpha<3$.

CORRECTION :

f définie $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{x+1}$

1/ Les fonctions : $x\to x$; $x\to\sqrt{x}$ et $x\to\frac{1}{x+1}$ sont des fonctions continues sur $[0;+\infty[$ et comme f est le produit de ces fonctions , alors f est continue sur $[0;+\infty[$.

2/ 1ère méthode :

Soient a et b dans $[0;+\infty[$ tels que $a<b$; on a : $f(a)-f(b)=\frac{a\sqrt{a}}{a+1}-\frac{b\sqrt{b}}{b+1}$

$$=\frac{a\sqrt{a}(b+1)-b\sqrt{b}(a+1)}{(a+1)(b+1)}$$

$$=\frac{ab\sqrt{a}+a\sqrt{a}-ab\sqrt{b}-b\sqrt{b}}{(a+1)(b+1)}$$

$$=\frac{ab\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)}{(a+1)(b+1)}$$

$0\le a<b$, donc $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ et $a\sqrt{a}<b\sqrt{b}$

Donc : $f(a)-f(b)<0$, d'où $f(a)<f(b)$

D'où f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

2ème méthode :

Pour tout $x\in]0,+\infty[$,on a :

$$f'(x)=\left(\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\right)'$$

$$=\frac{\left(x\sqrt{x}\right)'(x+1)-x\sqrt{x}(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)(x+1)-x\sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{3x(x+1)-2x^2}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+3x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

Donc $(\forall x\in]0,+\infty[)$: $f'(x)>0$

Remarque :

On peut aussi ....

D'où f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

■ La fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ et sur $]-\infty;-1[$; donc strictement positive sur $[0;+\infty[$.

■ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement positive sur $[0;+\infty[$;

Donc f est strictement croissante sur IR^+ .

3/ Considérons la fonction $g : x \mapsto f(x)-1$ On a g est continue sur $[0;+\infty[$ et g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, de plus on a :

$$\begin{cases} g(2) = f(2)-1 = \frac{2\sqrt{2}-3}{3} < 0 \\ g(3) = f(3)-1 = \frac{3\sqrt{3}-4}{4} > 0 \end{cases}$$

Donc d'après le T.V.I , il existe un unique α solution de l'équation $g(x)=0$ tel que $2<\alpha<3$; d'où $(\exists!\alpha \in]2;3[) / f(\alpha)=1$.

EXERCICE 13 :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

Montrer que : $(\exists\alpha \in [a,b])$: $5f(\alpha) = 2f(a)+3f(b)$

CORRECTION :

f définie et continue sur $[a,b]$, montrons que :$(\exists\alpha \in [a,b]): 5f(\alpha)=2f(a)+3f(b)$

On considère la fonction g définie sur $[a,b]$ par : $g(x)=5f(x)-2f(a)-3f(b)$. f est continue sur $[a,b]$ donc g est continue sur $[a,b]$, et on a :

$$\begin{cases} g(a)=5f(a)-2f(a)-3f(b)=3(f(a)-f(b)) \\ g(b)=5f(b)-2f(a)-3f(b)=3(f(b)-f(a)) \end{cases}$$

Donc : $g(a)\times g(b) = -3(f(a)-f(b))^2 \leq 0$

Alors, d'après le T.V.I : $(\exists\alpha \in [a,b]): g(\alpha)=0$

D'où : $(\exists\alpha \in [a,b]) / 5f(\alpha)=2f(\alpha)+3f(b)$

EXERCICE 14 :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$.

Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution α dans $[a,b]$

CORRECTION :

f est à valeurs dans $[a;b]$ donc :

f est continue sur $[a,b]$ telle que : $(\forall x \in [a,b]): f(x) \in [a,b]$

On considère la fonction g définie par : $g(x)=f(x)-x$

g est continue sur $[a,b]$ et on a : $\begin{cases} g(a)=f(a)-a \leq 0 & \text{car } f(a) \in [a,b] \\ g(b)=f(b)-b \geq 0 & \text{car } f(b) \in [a,b] \end{cases}$

Donc : $g(a)\times g(b)\leq 0$

Alors , d'après le T.V.I $\quad (\exists\alpha\in[a,b]) :\ g(\alpha)=0$

D'où $\quad (\exists\alpha\in[a,b]) :\ f(\alpha)=\alpha$.

EXERCICE 15

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-1}-x$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) Montrer que f admet une fonction réciproque dans $I=[1,+\infty[$ définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

3) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

CORRECTION :

$f(x)=\sqrt{x^2-1}-x$

1/ $x\in D_f \Leftrightarrow (x^2-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)\geq 0$

Tableau de signe de $(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x-1)(x+1)$		+	0	-	0	+	

Donc :$D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

2/ On a $x\mapsto x^2-1$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$

Donc $x\mapsto\sqrt{x^2-1}$ est continue sur $[1,+\infty[$

Alors , f est continue sur $[1,+\infty[$

Pour tout $x\in]1,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1$

$$=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

Donc : $\forall x\in]1;+\infty[\ \ f'(x)>0$,et f est continue sur $[1,+\infty[$ d'où f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Alors f admet une fonction réciproque f^{-1} sur $[1,+\infty[$ définie sur un intervalle J tel que :

$J=f([1,+\infty[)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$

D'où $\quad J=[-1;0[$

3/ pour tous $x \in [-1;0[$ et $y \in [1,+\infty[$; $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2-1} - y = x$$
$$\Leftrightarrow x + y = \sqrt{y^2-1}$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = y^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = y^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{-x^2-1}{2x} \quad (\text{ car } x \neq 0)$$

Donc : $(\forall x \in [-1,0[)$: $f^{-1}(x) = -\frac{x^2+1}{2x}$

EXERCICE 16

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$$

1) Déterminer D_f et les limites de f aux bornes de D_f .

2) Soit g la restriction de f sur $I =]0,2]$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

CORRECTION :

$$f(x) = \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$$

1/ $x \in D_f \Leftrightarrow (4-x^2) \geq 0$ et $x \neq 0$

$$\Leftrightarrow (2-x)(2+x) \geq 0 \text{ et } x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x \in [-2,2] \text{ et } x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow D_f = [-2,0[\cup]0,2]$$

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

2/ a- On a $x \mapsto 4-x^2$ est continue et positive sur $]0,2]$

Donc $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ et $x \mapsto 2+\sqrt{4-x^2}$ sont continues sur $]0,2]$. Et on a $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0,2]$

Alors, g est continue sur $]0,2]$

g est dérivable sur $]0,2[$, et pour tout $x \in]0,2[$ on a : $g'(x) = \frac{\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right) \times x - \left(2+\sqrt{4-x^2}\right)}{x^2}$

$$= \frac{-x^2 - 2\sqrt{4-x^2} - (4-x^2)}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$
$$= \frac{-x^2 - 2\sqrt{4-x^2} - 4 + x^2}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{-2\left(\sqrt{4-x^2}+2\right)}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

Donc, $\forall x \in]0,2[\; g'(x) < 0$

Alors, g est strictement décroissante sur I d'où elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = g(I)$ tel que : $J = g(I) = \left[g(2), \lim_{x\to 0^+} g(x)\right[= [1,+\infty[$

b/ Pour tous $x \in [1,+\infty[$ et $y \in]0,2]$, on a :

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{4-y^2}}{y} = x$$

$$\Leftrightarrow xy - 2 = \sqrt{4-y^2}$$

$$\Leftrightarrow (xy-2)^2 = 4 - y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 - 4xy + \cancel{4} = \cancel{4} - y^2$$

$$\Leftrightarrow y\left(x^2+1\right) = 4x = 0 \quad (\; car \;\; y \neq 0 \;)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4x}{x^2+1}$$

Donc $\quad g^{-1} : \; [1,+\infty[\to]0,2]$

$$x \to \frac{4x}{x^2+1}$$

<u>EXERCICE 17</u>

Montrer les égalités suivantes :

1- $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

2- $(\forall x > 0) \quad \operatorname{Arctan}x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

3- $(\forall x < 0) \quad \operatorname{Arctan}x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

4- $(\forall x \in IR) : \cos(\operatorname{Arctan}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

5- $(\forall x \in IR) : \sin(\operatorname{Arctan}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

<u>CORRECTION :</u>

1) Montrons que :

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

On pose : $a = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2}$, $b = \operatorname{Arctan}\frac{1}{5}$

et $c = \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$

On a : $0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}$, $0 < \frac{1}{5} < \frac{\sqrt{3}}{3}$, et $\quad 0<\frac{1}{8}<\frac{\sqrt{3}}{3}$

alors : $0<\arctan\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$, $0<\arctan\frac{1}{5}<\frac{\pi}{6}$ et $0<\arctan\frac{1}{8}<\frac{\pi}{6}$

Donc $\quad 0<a+b+c<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$, d'où $0<a+b+c<\frac{\pi}{2}$

De plus : $\quad \tan(a+b+c)=\frac{\tan(a+b)+\tan c}{1-\tan(a+b)\tan c}$

Et $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\frac{7}{9}$

Donc : $\quad \tan(a+b+c)=\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}}=1$

Et comme : $0<a+b+c<\frac{\pi}{2}$, alors $a+b+c=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$

2) Montrons que : $(\forall x>0)\quad \text{Arctan}x+\text{Arctan}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

Soit $x>0$, alors $\quad 0<\arctan x<\frac{\pi}{2}$, Donc: $0<\frac{\pi}{2}-\arctan x<\frac{\pi}{2}$ (1)

D'autre part : $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\frac{1}{\tan(\arctan x)}=\frac{1}{x}$ (2)

De (1) et (2) , on déduit que : $\frac{\pi}{2}-\arctan x=arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

D'où $\quad (\forall x>0)\quad \text{Arctan}x+\text{Arctan}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

6) Montrons que : $(\forall x\in IR):\cos(\text{Arctan}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Soit $x\in IR$; et comme la fonction $\tan$ est bijective

de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ vers IR ; alors : $\left(\exists! y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)/\tan y=x$

C'est-à-dire : $\arctan x=y$

On a : $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}}$

$$=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 y}}$$

$$=\sqrt{\cos^2 y}$$

$$=\cos y \qquad (car\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2})$$

Donc $(\forall x\in IR)\quad \cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

<u>$2^{ème}$ méthode :</u>

Soit $x\in IR$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan x)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}}}$$
$$=\sqrt{\cos^2(\arctan x)}$$
$$=\cos(\arctan x)\quad \left(car\ -\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}\right)$$

7) pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $\sin(\arctan x)=\tan(\arctan x)\times\cos(\arctan x)$
$$=x\times\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Donc : $(\forall x\in IR)\ \sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

EXERCICE 18:

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{\text{Arctan}x-\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\sqrt{3}}{3}}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\arctan x)}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\text{Arc}\tan\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}}{x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}x\text{Arc}\tan\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\text{Arc}\tan\left(\frac{1}{1-x^2}\right)+\frac{\pi}{2}}{x-1}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\text{Arc}\tan x-\frac{\pi}{2}\right)$

CORRECTION

Calculons $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\sqrt{3}}{3}}$:

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{\arctan x-\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}}{x-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$
$$=(\arctan)'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$$

Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\arctan x)}{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\arctan x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\arctan x)}{\arctan x}\times\frac{\arctan x}{x}\right)=1$ $\quad\left(Car\ \lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1\ \ et\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)=1\right)$

Calculons $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\arctan\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}}{x}\right)$

Rappel : $(\forall x>0)\quad \arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$ (voir ex17)

Donc $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\arctan\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{-\arctan x}{x}\right)=-1$

Calculons $\lim_{x\to+\infty}\left(x\arctan\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)\right)$

On a :

Et on a : $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)=1$

Avec le changement de variable : $X=\dfrac{x}{x^2-1}$

Quand $x\to+\infty$; $X\to 0$, on a : $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\arctan\left(\frac{x}{x^2-1}\right)}{\frac{x}{x^2-1}}\right)=\lim_{X\to 0}\dfrac{\arctan X}{X}=1$

Donc , $\lim_{x\to+\infty}\left(x\arctan\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)\right)=1$

Calculons : $\lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\arctan\left(\frac{1}{1-x^2}\right)+\frac{\pi}{2}}{x-1}\right)$

On a : $\arctan\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)=\dfrac{-\pi}{2}-\arctan\left(1-x^2\right)$ $\left(car\ \forall x\in\left]1,+\infty\right[\ ,\ 1-x^2<0\right)$

Donc : $\lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\arctan\left(\frac{1}{1-x^2}\right)+\frac{\pi}{2}}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{-\arctan\left(1-x^2\right)}{x-1}\right)$

$$=\lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\arctan\left(1-x^2\right)}{1-x^2}(1+x)\right)$$

$$=1\times 2=2$$

D'où : $\lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\arctan\left(\frac{1}{1-x^2}\right)+\frac{\pi}{2}}{x-1}\right)=2$

Calculons $\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

On a : $x>0\Rightarrow \arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x\arctan\frac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\lim_{X\to0}\left(-\frac{\arctan X}{X}\right)=-1$$

EXERCICE 19

Simplifier les deux nombres suivants : $\mathrm{A}=\dfrac{\sqrt{18}\times\sqrt[6]{256}\times\sqrt[4]{64}}{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[6]{10^6\times64}}$

CORRECTION :

$$A=\frac{\sqrt{18}\times\sqrt[6]{256}\sqrt[4]{64}}{\sqrt[3]{1024}\sqrt[6]{10^6\times64}}$$

$$=\frac{\sqrt{2\times3^2}\times\sqrt[6]{2^8}\sqrt[4]{2^6}}{\sqrt[3]{2^{10}}\times10\sqrt[6]{2^6}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2^4}\times\sqrt{2^3}}{\sqrt[3]{2^{10}}\times10\times2}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}\times\sqrt{2^3}}{10\times2}\times\sqrt[3]{\frac{2^4}{2^{10}}}$$

$$\mathrm{A}=\frac{3}{5}\times\sqrt[3]{\frac{1}{2^6}}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}$$

Donc $\boxed{\mathrm{A}=\frac{3}{20}}$

EXERCICE 20

On pose $a=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

1) Montrer que $a^3=3a+18$

2) Vérifier que 3 est solution de l'équation $x^3=3x+18$

3) En déduire la valeur de a

CORRECTION :

1) $a=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

On a : $a^3=9+\cancel{4\sqrt{5}}+9\cancel{-4\sqrt{5}}+3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\times\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right)$

[On utilise l'identité $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$]

Donc $a^3=18+3a$, d'où $a^3-3a-18=0$

2) On a : $3^3=27$ et $18+3\times3=27$ donc $3^3=18+3\times3$ Alors 3 est solution de l'équation $x^3=3x+18$

3) On a : $a^3=3a+18$, donc a est solution de l'équation : $(E): x^3-3x-18=0$

$$(\mathrm{E})\Leftrightarrow(x-3)\underbrace{\left(x^2+3x+6\right)}_{\Delta<0}=0$$

$$\Leftrightarrow x=3$$

D'où : $a=3$

EXERCICE 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1- $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{2}$

2- $2\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{1-x}=\sqrt[8]{1-x^2}$

CORRECTION

1) On résout l'équation : $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{2}$ (1)

Le domaine de définition de l'équation (E) est : $[-1;1]$

On remarque que 1 et -1 ne sont pas des solutions de (1).

Pour tout $x\in]-1;1[$, on a : $(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)^3=\sqrt[3]{2}^3$

$$\Leftrightarrow 1+x+1-x+3\sqrt[3]{1+x}\times\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)=2$$

$$\left(car\ \ (a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\right)$$

Donc $(1)\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{1+x}\times\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{1+x}=0\ ou\ \sqrt[3]{1-x}=0\quad\left(car\ \ \sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\neq0\right)$$

D'où $(1)\Leftrightarrow x=-1\ ou\ x=1$ Alors $S=\{-1,1\}$

2) on résout l'équation : $\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{1-x}=\sqrt[8]{1-x^2}$ (E)

Le domaine de définition de l'équation (E) est :$[-1;1]$

1 et -1 n'appartiennent pas à l'ensemble de solution de (E) car ils ne vérifient pas (E).

Pour tout $x\in]-1;1[$, on a :

$$(E)\Leftrightarrow 2\frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[8]{1-x^2}}-\frac{\sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[8]{1-x^2}}=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt[8]{\frac{(x+1)^2}{1-x^2}}-\sqrt[8]{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[8]{\frac{1-x}{1+x}}=1$$

On pose : $X=\sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}}$

$$(E)\Leftrightarrow 2X-\frac{1}{X}=1$$

$$\Leftrightarrow 2X^2-X-1=0\Leftrightarrow X=1\ ou\ X=\frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \quad (\, car \;\; X \geq 0 \,)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Et comme $0 \in [-1,1]$, alors : $S = \{0\}$

EXERCICE 22

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x-2}$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt[3]{x+8} - 2}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 2x} - x$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{-x} + x}{\sqrt{-x} + x}$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{1 - x^3} + x$	

NIVEAU2

EXERCICE 23

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$$

1) Étudier les variations de la fonction dérivée f'

2) a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que

$$-3 < \alpha < -2$$

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,25

3) Déterminer le signe de la fonction f'

4) a) En déduire les variations de la fonction f

b) montrer que $f(\alpha) = \frac{3\alpha(4-\alpha)}{4}$

c) Quel est le nombre de racines du polynôme f ?

CORRECTION :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$$

1) Etudions les variations de f' .

On a f est dérivable sur IR car f est une fonction polynôme, et on :

$(\forall x \in IR)\; f'(x) = x^3 - 3x + 4$ f' est dérivable sur IR car c'est une fonction polynôme ,et on a

$$(\forall x \in IR)\; f''(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

Tableau de variation de f' sur IR.

x	$-\infty$		-3	α	-2		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$			+				0	-	0	+	
$f'(x)$	$-\infty$	↗		0		↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

2) a) f' est continue et strictement croissante sur $]-\infty;-1]$, de plus on a : $\begin{cases} f'(-3)=-15 \\ f'(-2)=2 \end{cases}$

Donc $f'(-3)\times f'(-2)\le 0$

Alors d'après le T.V.I , il existe un réel α unique solution de l'équation $f'(x)=0$ tel que : $-3<\alpha<-2$. De plus $\left(\forall x\in[-1,+\infty[\right)$: $f'(x)\ge 2>0$

Donc l'équation $f'(x)=0$ n'admet pas de solution sur $[-1;+\infty[$.

Conclusion :

L'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α dans IR.

b) Encadrement de α d'amplitude 0,25

on a : $-3<\alpha<-2$

En utilisant la méthode de la dichotomie une 1ère fois, on a : $\frac{-3-2}{2}=-\frac{5}{2}$, et

$f'\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{33}{8}$

Donc : $f'(-2)\times f'(-2,5)<0$

D'où : $-2,5<\alpha<-2$

Puis une 2ème fois :

On a $\frac{-\frac{5}{2}-2}{2}=-\frac{9}{4}$, et $f'\left(-\frac{9}{4}\right)=-\frac{41}{64}$

Donc $f'\left(-\frac{9}{4}\right)\times f'(-2)<0$, d'où : $-\frac{9}{4}<\alpha<-2$

c'est l'encadrement de α d'amplitude $-2-(\frac{-9}{4})=0,25$

3) déterminons le signe de $f'(x)$

On a (d'après le tableau de variation de f')

- $f'(]-\infty;\alpha])=]-\infty;0]$

Donc : $\left(\forall x\in]-\infty;\alpha]\right)$ $f'(x)\le 0$

- $f'([\alpha;+\infty[)=[0;+\infty[$

Donc : $\left(\forall x\in[\alpha;+\infty[\right)$ $f'(x)\ge 0$

On résume le signe de $f'(x)$ dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

1) a) D'après le tableau de signe de f', on déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

b) Montrons que : $f(\alpha)=\dfrac{3\alpha(4-\alpha)}{4}$

On a : $f'(\alpha)=0$, d'où : $\alpha^3-3\alpha+4=0$

Donc $\alpha^3=3\alpha-4$

Donc : $f(\alpha)=\dfrac{1}{4}\alpha^4-\dfrac{3}{2}\alpha^2+4\alpha$

$$=\alpha\left(\frac{1}{4}\alpha^3-\frac{3}{2}\alpha+4\right)$$

D'où $f(\alpha)=\alpha\left(\dfrac{1}{4}(3\alpha-4)-\dfrac{3}{2}\alpha+4\right)$

$$=\alpha\left(\frac{3}{4}\alpha-1-\frac{3}{2}\alpha+4\right)$$

$$=\alpha\left(-\frac{3}{4}\alpha+3\right)$$

$$=3\alpha\left(1-\frac{1}{4}\alpha\right)$$

$$=\frac{3\alpha(4-\alpha)}{4}$$

Et comme : $-3<\alpha<-2$; alors : $f(\alpha)<0$

D'où : l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β dans l'intervalle $]-\infty;\alpha]$ car f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et $0\in f(]-\infty;\alpha])=[f(\alpha);+\infty[$. De même l'équation admet une unique solution dans l'intervalle $[\alpha;+\infty[$ qui est 0 car $f(0)=0$

Conclusion :le polynôme f admet deux racines dans IR.

EXERCICE 24

Montrer que : $(\forall x>0)$;$\mathrm{Arctan}(x+1)-\mathrm{Arctan}x=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$

CORRECTION

Soit $x>0$.

On a : $0<\arctan x<\dfrac{\pi}{2}$ et $0<\arctan(x+1)<\dfrac{\pi}{2}$

Donc $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan(x+1)-\arctan(x)<\dfrac{\pi}{2}$ (1)

De plus : $\tan\left(\arctan(x+1)-\arctan(x)\right)=\dfrac{x+1-x}{1+x(x+1)}$ *alors*

$$\tan\left(\arctan(x+1)-\arctan(x)\right)=\frac{1}{x^2+x+1}\quad(2)$$

De (1) et (2), on déduit que : $\arctan(x+1)-\arctan(x)=\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$

EXERCICE 25

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

1) $\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)+\operatorname{Arc}\tan(x)=\dfrac{\pi}{2}$

2) $\operatorname{Arc}\tan(2x)+\operatorname{Arc}\tan(3x)=\dfrac{\pi}{4}$

CORRECTION

1) *Résoudre dans IR ;* $\arctan\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)+\arctan x=\dfrac{\pi}{2}\quad(E)$

- *Si* $x<0$ *alors :* $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan x<0$

  Et on a : $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)<\dfrac{\pi}{2}$

  Donc $\arctan\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)+\arctan x<\dfrac{\pi}{2}$

  Alors : (E) *n'a pas de solution dans* $]-\infty;0[$

- *Si* $x>0$ *alors :* $\arctan x+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

Donc : $(E)\Leftrightarrow\arctan\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$

$$\Leftrightarrow\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{1}{x}$$

$\Leftrightarrow x^2-x-1=0\qquad\Delta=5$*, donc :* $\cancel{x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}<0$*; solution non valable et*

$x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>0$ *(car* $x>0$ *), d'où :* $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

2) *On résout l'équation :* (F)*:* $\operatorname{Arc}\tan(2x)+\operatorname{Arc}\tan(3x)=\dfrac{\pi}{4}$

Si $x \leq 0$, alors $\operatorname{Arc}\tan(2x) + \operatorname{Arc}\tan(3x) \leq 0$; Et comme $\frac{\pi}{4} > 0$ alors l'équation (F) n'a pas de solution

Si $x > 0$, alors $0 < \operatorname{Arc}\tan(2x) < \frac{\pi}{2}$

Et $\frac{-\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \operatorname{Arc}\tan(2x) < \frac{\pi}{4}$, donc pour tout $x > 0$:

$$(F) \Leftrightarrow \arctan(3x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(2x)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan(2x)\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(\arctan(2x))}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \tan(\arctan(2x))}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{1-2x}{1+2x}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{6}$$

Et comme $x > 0$, alors : $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$

EXERCICE 26 :

Pour tout $n \in IN^* - \{1\}$ $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on considère la fonction f_n définie sur IR^+ par :

$f_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$

1) Étudier les variations de la fonction f_n

2) En déduire que $f_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) \leq 0$

3) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left[\frac{2n}{n+1} ; 2\right]$

b) En déduire le signe de $f_n(x)$ suivant les valeurs de x.

CORRECTION

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a : $f_n'(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1}$

$$= x^{n-1}((n+1)x - 2n)$$

On a : $x \geq 0$, donc le signe de $f_n'(x)$ est celui de $(n+1)x - 2n$

Tableau de variation de f sur IR^+.

x	0		1		$\frac{2n}{n+1}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$f\left(\frac{2n}{n+1}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

• On a : $\left(\forall n \in IN^* - \{1\}\right)$; $2n \geq n+1$

Alors $\frac{2n}{n+1} \geq 1$, donc $f_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) \leq f_n(1)$ et $f_n(1) = 0$ (car f_n est strictement décroissante sur $\left[1;\frac{2n}{n+1}\right]$)

D'où : $\left(\forall n \in IN^* - \{1\}\right)$; $f_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) \leq 0$

1) a) f_n est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{2n}{n+1};2\right]$

De plus, on a : $f_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) \leq 0$ et $f_n(2) = 1 \geq 0$

Donc : $f_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) \times f_n(2) \leq 0$

D'où : d'après le TVI , l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left[\frac{2n}{n+1};2\right]$.

b) Soit g_n la restriction de f_n sur $\left[0;\frac{2n}{n+1}\right]$

g_n est continue et strictement décroissante sur $\left[0;\frac{2n}{n+1}\right]$

Donc g_n est bijective de $\left[0;\frac{2n}{n+1}\right]$ vers $\left[f_n\left(\frac{2n}{n+1}\right);1\right]$

$f_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) \leq 0$ alors $0 \in \left[f_n\left(\frac{2n}{n+1}\right);1\right]$

D'où : l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $\beta = 1$ dans $\left[0;\frac{2n}{n+1}\right]$

• On a : $f_n([0;1]) = [0;1]$

Donc : $\left(\forall x \in [0;1]\right)$; $f_n(x) \geq 0$

- On a : $f_n([1;\alpha]) = \left[f_n\left(\frac{2n}{n+1}\right);0\right]$

Donc : $(\forall x \in [1;\alpha[)$; $f_n(x) \leq 0$

- On a : $f_n([\alpha;+\infty[) = [0;+\infty[$

Donc : $(\forall x \in [\alpha;+\infty[)$; $f_n(x) \geq 0$

On Résume le signe de $f_n(x)$ sur $[0;+\infty[$ dans le tableau suivant :

x	0		1		α		$+\infty$
$f_n(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

EXERCICE 27

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Supposons que f ne s'annule pas sur I.
Montrer que f garde un signe constant sur I

CORRECTION

Montrons par l'absurde que si f est continue sur I et que $(\forall x \in I)$; $f(x) \neq 0$, alors :

$(\forall x \in I)$; $f(x) > 0$ ou $(\forall x \in I)$;$f(x) < 0$

On suppose $(\exists a \in I) / f(a) \leq 0$ et $(\exists b \in I) / f(b) \geq 0$ alors on a : $f(b) \times f(b) < 0$ (on suppose que $a < b$).

Et comme f est continue sur I et $[a;b] \subset I$ alors f est continue sur $[a;b]$; donc d'après le TVI ; $\exists c \in]a;b[/ f(c) = 0$ ce qui contredit le fait que f ne s'annule pas sur I.

Conclusion

Si f une fonction continue sur un intervalle I et f ne s'annule pas sur I alors f garde le même signe sur l'intervalle I.

EXERCICE 28

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
2) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

CORRECTION :

1) On a : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

- $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1+|x|$ sont continues sur $\mathbb{R}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) : 1+|x| \neq 0$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(-x) = -f(x)$

Donc f est impair ; il suffit d'étudier la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$

Alors $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

$(\forall x \in [0;+\infty[)$; $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$

Donc : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Comme f est impaire alors f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$

D'où : f est croissante sur IR.

Donc : f est une bijection de IR vers J ; où $J = f(IR)$

$$= \left]\lim_{x\to-\infty} f(x);\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$

$$=]-1;1[$$

2) Soit $x \in]-1;1[$ et $y \in IR$

• $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y}{1+|y|}$$

Comme $1+|y| > 0$ donc x et y sont de même signe.

<u>1^er^ cas :</u>

Si $x \in [0;1[$ alors $y \in IR^+$

• $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{1+y}$

$$\Leftrightarrow y = x(1+y)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x} \quad (car\ x \neq 1)$$

Donc : $(\forall x \in [0;1[)$; $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x}$

<u>2^ème^ cas :</u>

Si $x \in]-1;0]$ alors $y \in IR^-$; $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{x+1} \quad (car x \neq -1)$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x} & si\ x \in [0;1[\\ f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+x} & si\ x \in]-1;0] \end{cases}$$

D'où : $(\forall x \in]-1;1[)$; $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$

<u>EXERCICE 29</u>

On considère l'équation suivante : $(E) : \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$

1) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution α dans IR et que $0 < \alpha < 1$

2) Résoudre dans IR l'équation (E)

<u>CORRECTION :</u>

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1)$

f est continue sur $\mathbb{R}$ (f est la somme des fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

Soient x et y deux réels de $\mathbb{R}$ tels que $x < y$.

Alors $x-1 < y-1$ et $x+1 < y+1$

Donc $\arctan(x-1) < \arctan(y-1)$; $\arctan x < \arctan y$ et $\arctan(x+1) < \arctan(y+1)$

D'où $f(x) < f(y)$

Alors , f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Par suite, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left]\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

On a $\dfrac{\pi}{2} \in f(\mathbb{R})$, donc l'équation (E) admet une unique solution α dans IR .

$f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{\pi}{4} + \arctan(2)$

Et comme $\dfrac{\pi}{4} < \arctan(2)$ (car $2 > 1$) , alors $f(1) > \dfrac{\pi}{2}$

D'où $f(0) < \dfrac{\pi}{2} < f(1)$, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires $0 < \alpha < 1$.

2) On résout dans IR l'équation (E)

D'après (1), l'équation (E) admet une unique solution α dans IR tels que : $0 < \alpha < 1$.

Donc il suffit de résoudre l'équation (E) dans $]0,1[$

Soit $x \in]0;1[$, alors $-1 < x-1 < 0$ et $1 < x+1$

Donc $\dfrac{-\pi}{4} < \arctan(x-1) < 0$, $\dfrac{\pi}{4} < \arctan(x+1) < \dfrac{\pi}{2}$

D'où $0 < \arctan(x-1) + \arctan(x+1) < \dfrac{\pi}{2}$

Alors, on a : $(E) \Leftrightarrow \arctan(x-1) + \arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$

$$\Leftrightarrow \arctan(x-1) + \arctan(x+1) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\arctan(x-1) + \arctan(x+1)\right) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1+x+1}{1-(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2-x^2}=\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (\ car\ \ x>0)$$

Alors : $S=\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$

EXERCICE 30 :

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ tel que : $f(0)=f(1)$.

1) Montrer que l'équation $f(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ au moins une solution c dans $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

2) Soit g la fonction définie par : $g(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$ Où $n\in\mathbb{N}^*$

a) Montrer que : $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)=0$

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\left(\exists\alpha_n\in\left[0;1-\frac{1}{n}\right]\right)$: $f(\alpha_n)=f\left(\alpha_n+\frac{1}{n}\right)$

CORRECTION :

1) Soit $\varphi(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right)$

f est continue sur $[0;1]$, en particulier sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

On a : $h: x\mapsto x+\frac{1}{2}$ est continue sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et $h\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)\subset[0;1]$; donc : $f\circ h$ est continue sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

D'où : φ est continue sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

$$\begin{cases}\varphi(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)\\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)\\ \qquad\quad =f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)=-\varphi(0)\end{cases}$$

Donc : $\varphi(0)\times\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\leq 0$

D'après le T.V.I ; l'équation $\varphi(x)=0$

$\left(\text{càd } f(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$; d'où :

$\left(\exists c\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)/\ \varphi(c)=0$

Donc $\exists c\in\left[0;\frac{1}{2}\right]/\ f(c)=f\left(c+\frac{1}{2}\right)$

2) $g(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$

$$\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)=g(0)+g\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+g\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$=f\left(\cancel{\frac{1}{n}}\right)-f(0)+f\left(\cancel{\frac{2}{n}}\right)-f\left(\cancel{\frac{1}{n}}\right)+\cdots+f\left(\cancel{\frac{n-2}{n}}\right)+f\left(\cancel{\frac{n-1}{n}}\right)+f\left(\cancel{\frac{n-1}{n}}\right)-f\left(\cancel{\frac{n-2}{n}}\right)+f(1)-f\left(\cancel{\frac{n-1}{n}}\right)$$

$$=f(1)-f(0)$$

$$=0\qquad (\text{car } f(1)=f(0)$$

3) On a d'après la question précédente : $\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)=0$ alors :

$\exists(k_1;k_2)\in\{0;1;\cdots;n-1\}^2/\ g\left(\frac{k_1}{n}\right)\geq 0$ et $g\left(\frac{k_2}{n}\right)\leq 0$

Donc : $g\left(\frac{k_1}{n}\right)\times\ g\left(\frac{k_2}{n}\right)\leq 0$

Et comme g est continue sur l'intervalle fermé I de bornes $\frac{k_1}{n}$ et $\frac{k_2}{n}$; alors d'après le

T.V.I : $(\exists\alpha_n\in I)/\ g(\alpha_n)=0$

D'où $\exists\alpha_n\in\left[0;1-\frac{1}{n}\right]/\ f(\alpha_n)=f\left(\alpha_n+\frac{1}{n}\right)$

<u>2ème méthode :</u>

On a : g est continue sur $\left[0;1-\frac{1}{n}\right]$

Donc $g\left(\left[0;1-\frac{1}{n}\right]\right)=[m;M]$ où $m=\min\limits_{0\leq x\leq 1-\frac{1}{n}}(g(x))$ et $M=\max\limits_{0\leq x\leq 1-\frac{1}{n}}(g(x))$

Alors $\left(\forall x\in\left[0;1-\frac{1}{n}\right]\right)\quad m\leq g(x)\leq M$

Et comme : $(\forall k\in\{0;1;\cdots;n-1\})\quad 0\leq\frac{k}{n}\leq 1-\frac{1}{n}$

Alors : $m \leq g\left(\frac{k}{n}\right) \leq M$ d'où $n \times m \leq \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \leq n \times M$

Donc $m \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \leq M$

On a de plus $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, alors $0 \in [m;M]$

Donc $\left(\exists \alpha_n \in \left[0;1-\frac{1}{n}\right]\right) / g(\alpha_n) = 0$

D'où : $\left(\exists \alpha_n \in \left[0;1-\frac{1}{n}\right]\right) / f(\alpha_n) = f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right)$

<u>3ème méthode :</u>

Supposons par l'absurde que :

$(\exists n_0 \in IN^*)\left(\forall x \in \left[0;1-\frac{1}{n_0}\right]\right) / f(x) \neq f\left(x + \frac{1}{n_0}\right)$ Soit $g(x) = f\left(x + \frac{1}{n_0}\right) - f(x)$

g est continue sur $\left[0;1-\frac{1}{n_0}\right]$, et comme $\left(\forall x \in \left[0;1-\frac{1}{n_0}\right]\right); g(x) \neq 0$

C'est-à-dire que g est continue et ne s'annule pas sur $\left[0;1-\frac{1}{n_0}\right]$; Alors d'après

(l'exercice3) g garde un signe constant, alors :

$\left(\forall x \in \left[0;1-\frac{1}{n_0}\right]\right)\ g(x) > 0$ Ou $\left(\forall x \in \left[0;1-\frac{1}{n_0}\right]\right)\ g(x) < 0$

Donc : $\sum_{k=0}^{n_0-1} g\left(\frac{k}{n_0}\right) > 0$ ou $\sum_{k=0}^{n_0-1} g\left(\frac{k}{n_0}\right) < 0$

Ce qui contredit le fait que : $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ (d'après (2-a))

Donc $\left(\exists \alpha_n \in \left[0;1-\frac{1}{n}\right]\right) : f(\alpha_n) = f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right)$

<u>**EXERCICE 31 :**</u>

Soit f la fonction définie sur $\left[2\pi;\frac{7\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = \tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x$

1) Montrer que f est une bijection de $\left[2\pi;\frac{7\pi}{3}\right]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

CORRECTION :

1) La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, et en particulier sur $\left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]$.

Donc f est continue sur $\left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]$, de plus, on a : $\left(\forall x \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]\right)$

$$f'(x) = 2\left(1 + \tan^2(x)\right)\left(\tan x - \sqrt{3}\right)$$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\tan x - \sqrt{3}$

$\left(\forall x \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]\right) : \tan x \leq \tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

D'où $\left(\forall x \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]\right)$; $\tan x \leq \sqrt{3}$

Alors : $\left(\forall x \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]\right)$; $f'(x) \leq 0$

Donc f est strictement croissante sur $\left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]$

Et comme f est continue sur $\left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]$ alors f est bijective de $\left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]$ vers J tel que :

$J = f\left(\left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]\right) = \left[f(2\pi); f\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right]$ D'où $J = [-3;0]$

2) Pour tout $x \in [-3;0]$, et pour tout $y \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]$

3)
$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \tan^2(y) - 2\sqrt{3}\tan(y) = x \\ &\Leftrightarrow \left(\tan y - \sqrt{3}\right)^2 = x + 3 \\ &\Leftrightarrow \tan y - \sqrt{3} = -\sqrt{x+3} \text{ (car } \tan y - \sqrt{3} \leq 0) \\ &\Leftrightarrow \tan y = \sqrt{3} - \sqrt{x+3} \end{aligned}$$

Or, $2\pi \leq y \leq \frac{7\pi}{3}$, donc $0 \leq y - 2\pi \leq \frac{\pi}{3}$

D'où, $\Leftrightarrow y - 2\pi = \arctan\left(\sqrt{3} - \sqrt{x+3}\right)$

$\Leftrightarrow y = 2\pi + \arctan\left(\sqrt{3} - \sqrt{x+3}\right)$

D'où : $\left(\forall x \in [-3;0]\right)$; $f^{-1}(x) = 2\pi + \arctan\left(\sqrt{3} - \sqrt{x+3}\right)$

EXERCICE 32 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f, puis calculer les limites aux bornes de D_f.

2) Montrer que f est une bijection de $]-1;+\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

3) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

CORRECTION :

1) $x \in D_f \Leftrightarrow x^3+1>0$

$\Leftrightarrow x^3>-1$

$\Leftrightarrow x>-1$

Donc $D_f=]-1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) la fonction $x \mapsto x^3+1$ est continue et strictement positive sur $]-1;+\infty[$, donc

$x \mapsto \sqrt{x^3+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ sont continues sur $]-1;+\infty[$

D'où f est continue sur $]-1;+\infty[$

f est dérivable sur $]-1;+\infty[$, et pour tout $x \in]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-\left(\sqrt{x^3+1}\right)'}{\sqrt{x^3+1}^2}$

$$=\frac{-3x^2}{2\left(x^3+1\right)\sqrt{x^3+1}}$$

Donc $(\forall x \in]-1;+\infty[) ; f'(x) \geq 0$

Alors f est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$, par conséquent, f est bijective de

$]-1;+\infty[$ sur J tel que : $J=f(]-1;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)\right[$

D'où $J=]0;+\infty[$

4) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, et pour tout $y \in]-1;+\infty[$; on a :

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{y^3+1}}=x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y^3+1}=\dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow y^3+1=\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow y^3=\dfrac{1}{x^2}-1=\dfrac{1-x^2}{x^2}$

$$\text{Donc : } \begin{cases} f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{x^2}} & si \quad x \in]0;1] \\ f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x^2}} & si \ x \in [1;+\infty[\end{cases}$$

<u>EXERCICE 33 :</u>

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f, puis D_E le domaine d'étude de f

2) simplifier $f(x)$ sur D_E

3) représenter graphiquement la courbe de f sur $[-2\pi;2\pi]$ dans un repère orthonormé.

<u>CORRECTION :</u>

$f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$

1) $x \in D_f \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} \geq 0$ et $1+\cos x \neq 0$ On sait que : $-1 \leq \cos x \leq 1$; $(\forall x \in IR)$

Donc : $(\forall x \in IR)$; $1-\cos x \geq 0$ et $1+\cos x \geq 0$ D'où : $x \in D_f \Leftrightarrow 1+\cos x \neq 0$

$\Leftrightarrow \cos x \neq -1$

$\Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D_f = IR \setminus \{\pi + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$

On a f est paire et f est périodique de période 2π ; alors il suffit d'étudier f sur $[0;\pi[$, alors $D_E = [0;\pi[$

2) Soit $x \in [0;\pi[$. On a : $\begin{cases} 1+\cos x = 2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \\ 1-\cos x = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$

$$\text{Donc : } f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}}$$

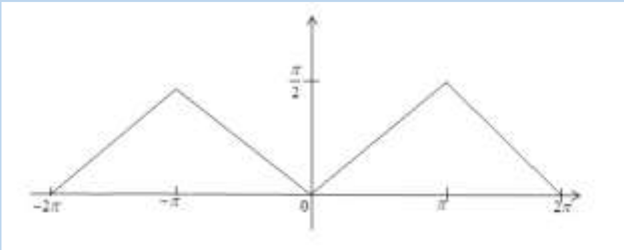
$$= \arctan\sqrt{\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

$$= \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$\left(car\ 0 \le \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}\ \ et\ \tan\left(\frac{x}{2}\right) \ge 0\right)$

$D'où : \left(\forall x \in [0;\pi[\right)\ ;\ f(x) = \frac{x}{2}$

3) <u>Graphique :</u>



<u>**EXERCICE 34 :**</u>

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+8}-2}$	$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt[3]{1-x}+x^2-1}{x-1}$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3+2x}-x$	$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{-x}+x}{\sqrt{-x}+x}$
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{Arc}\tan\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt[12]{x}$
$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x+2}}{x-2}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{\frac{1}{3}}-2x+1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$

Rappel :

$$\bullet)\ a-b = \frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$$

$$\bullet)\ a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

• On a: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+8}-2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cancel{(x+1-1)}\left(\sqrt[3]{x+8}^2+2\sqrt[3]{x+8}+4\right)}{\cancel{(x+8-8)}\left(\sqrt[4]{x+1}^3+\sqrt[4]{x+1}^2+\sqrt[4]{x+1}+1\right)}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x+8}^2+2\sqrt[3]{x+8}+4\right)}{\left(\sqrt[4]{x+1}^3+\sqrt[4]{x+1}^2+\sqrt[4]{x+1}+1\right)}\right)$$

$$=\frac{12}{4}=3$$

• *On a:* $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sqrt[3]{1-x}+\left(x^2-1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sqrt[3]{1-x}}{x-1}+\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1^-}\left(-\sqrt[3]{\frac{1-x}{(1-x)^3}}+(x+1)\right)$$

$$=\lim_{x\to1^-}\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{(1-x)^2}}+(x+1)\right)=-\infty$$

•) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}+2x-\cancel{x^3}}{\sqrt[3]{x^3+2x}^2+x\sqrt[3]{x^3+2x}+x^2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt[3]{x^3+2x}^2+x\sqrt[3]{x^3+2x}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}^2+x\sqrt[3]{x^3+2x}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}}^2+x^2\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}}^2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}}^2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}}+1\right)}=0$$

• *Calcul de* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{-x}+x}{\sqrt{-x}+x}$

On pose $X=\sqrt[6]{-x}$ *, alors* $x=-X^6$ *, donc :* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{-x}+x}{\sqrt{-x}+x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X^2-X^6}{X^3-X^6}$

$$=\lim_{X\to+\infty}\frac{-X^6}{-X^6}=1$$

•) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\arctan\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\arctan\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)}{1-\sqrt[3]{x^2}}\times\frac{1-\sqrt[3]{x^2}}{x-1}$

$$On\ a:\ \lim_{x\to 1}\frac{\arctan\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)}{1-\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t}=1$$

$$\left(t=1-\sqrt[3]{x^2}\right)$$

$$Et\quad \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x^2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1}=-\frac{2}{3}$$

$$Donc:\ \lim_{x\to 1}\frac{\arctan\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)}{x-1}=-\frac{2}{3}$$

- Pour calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}\times\sqrt[12]{x}\right)$

On pose : $t=\sqrt[12]{x}$ alors : $x=t^{12}$ et : $x\mapsto+\infty\Rightarrow t\mapsto+\infty$

On obtient : $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}\times\sqrt[12]{x}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sqrt[4]{t^{12}+1}-\sqrt[4]{t^{12}}}{\sqrt[3]{t^{12}+1}-\sqrt[3]{t^{12}}}\times t\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sqrt[4]{t^{12}+1}-t^3}{\sqrt[3]{t^{12}+1}-t^4}\times t\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^3\times t}{t^4}\times\frac{\sqrt[4]{1+\frac{1}{t^{12}}}-1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{t^{12}}}-1}\right)$$

Posons : $X=\frac{1}{t^{12}}$ donc $t\mapsto+\infty\Rightarrow X\to 0$

$$D'où:\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}\times\sqrt[12]{x}\right)=\lim_{X\to 0}\left(\frac{\sqrt[4]{1+X}-1}{\sqrt[3]{1+X}-1}\right)$$

$$=\lim_{X\to 0}\left(\frac{\cancel{(1+X-1)}\left(\sqrt[3]{1+X}^2+\sqrt[3]{1+X}+1\right)}{\cancel{(1+X-1)}\left(\sqrt[4]{1+X}^3+\sqrt[4]{1+X}^2+\sqrt[4]{1+X}+1\right)}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1\right)}{\left(\sqrt[4]{1+x}^3 + \sqrt[4]{1+x}^2 + \sqrt[4]{1+x} + 1\right)} \right) = \frac{3}{4}$$

• *Calcul de* $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt{x+2}}{x-2}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt{x+2}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2 + 2 - \sqrt{x+2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x-2} + \lim_{x \to 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x+6-8}{(x-2)\left(\sqrt[3]{x+6}^2 + \sqrt[3]{x+6} \times 2 + 2^2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+6}^2 + \sqrt[3]{x+6} \times 2 + 2^2\right)} = \frac{1}{12}$$

Et $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2 - \sqrt{x+2}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-1}{2 + \sqrt{x+2}} = \dfrac{-1}{4}$

Donc $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt{x+2}}{x-2} = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{-1}{6}$

• *Calcul de* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\frac{1}{3}} - 2x + 1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 2x + 1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 2x + 1}{x^{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{-2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} - 2x + 1\right)}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{-1}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{-2}{3}}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}} = -\infty$$

Car : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{-1}{3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{-2}{3}} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{3}} = +\infty$

Remarque : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^r = +\infty & si \quad r \in \mathbb{Q}^{+*} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^r = 0 & si \quad r \in \mathbb{Q}^{-*} \end{cases}$