Série d'exercices 5 non corrigés « dérivabilité et étude de fonction »

Exercice 1

1- On considère le polynôme $P(x)=x^3-3x^2+2$

a) Vérifier que $P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)$

b) Etudier le signe de $P(x)$.

2- On considère la fonction f définie sur $IR-\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (1 cm pour l'unité)

a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2} f(x)$. Préciser les asymptotes verticales et horizontales éventuelles.

b) Montrer que $f'(x)=\dfrac{2P(x)}{(x-2)^2}$

c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

d) Tracer C dans le repère précisé ci-dessus

3 - a) Pour quelle abscisse α la tangente au point d'abscisse α est-elle horizontale .Justifier.

b) Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse $x=3$ et la tracer dans le même repère que C.

4- Trouvera, b, c et d tels que : $f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x-2}$

5- On admet que $f(x)=x^2+2x+1+\dfrac{4}{x-2}$

On appelle g la fonction définie par : $g(x)=x^2+2x+1$ et C' sa courbe représentative.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-g(x)\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)$

Que peut-on en déduire sur les courbes C et C'.

b) Etudier la position relative de C et C'

c) Tracer C' dans le même repère que C et I en utilisant les résultats des questions a) et b).

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $D=]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -2 et à droite en 0. Interpréter les résultats trouvés.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $D-\{-2;0\}$ et vérifier que $f'(x)<0$ pour $x<-2$ et $f'(x)>0$ pour $x>0$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

3) Montrer que la droite Δ d'équation $y=-2x-1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

4) Tracer Δ et (C)

5) Soit (C') le symétrique de (C) par rapport au point $I(-1,\ 0)$

a) Monter que pour tous points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ on a: $M' = S(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x-2 \\ y' = -y \end{cases}$

b) Soit g la fonction qui admet pour représentation graphique la courbe (C).

Montrer que g est définie sur D par $g(x) = -x-2-\sqrt{x^2+2x}$

Exercice 3

Soit f la fonction definie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *par :* $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\cos x} & si\ x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right] \\ f(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{\cos x} & si\ x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

On note C *la courbe representative de f dans le plan muni d'un repére orthonormé.*

1) Montrer que f est continue et dérivable en o et preciser $f'(0)$.

2) Vérifier que le point $A(0,\ 1)$ *est un centre de symetrie pour la courbe* C.

3) a) Etudier les variations de f.

b) Tracer la courbe C .

4) a)Montrer que f admet une fonction réciproque qu'on note f^{-1} *définie sur un intervalle J qu'on déterminera.*

b) Tracer la courbe représentative de f^{-1} *dans le même repère que la courbe* C .

5) a)Montrer que f^{-1} *est dérivable sur chacun des intervalles* $]-\infty;1[$ *et* $]1;+\infty[$ *et que :*

$$\begin{cases} \left(f^{-1}\right)' = \dfrac{-1}{(2-x)\sqrt{x^2-4x+3}} & si\ x \in]-\infty;1[\\ \left(f^{-1}\right)' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} & si\ x \in]1;+\infty[\end{cases}$$

b) La fonction f^{-1} *est-elle dérivable en 1? Justifier votre réponse.*