Exercice 1 : (3 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif.

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$

0.5 1) Montrer que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

0.5 2) a- Montrer que l'application φ qui à tout nombre réel x associe la matrice M(x) est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\times)$.

0.5 b- en déduire que $(E,\times)$ est un groupe commutatif.

0.5 c- Pour x réel ,déterminer $M^{-1}(x)$ l'inverse de la matrice $M(x)$

0.5 d- résoudre dans l'ensemble E l'équation $A^5X=B$ où $A = M(2)$ et $B = M(12)$ et $A^5 = \underbrace{A\times A\times ......\times A}_{5 fois}$

0.5 3) Montrer que l'ensemble $F = \{M(\ln(x)) / x \in \mathbb{R}_+^*\}$ est sous-groupe de $(E,\times)$

Exercice 2 : (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

0.5 a- vérifier que le nombre $a = 1 + i(2-\sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E)

0.5 b- En déduire b la deuxième solution de l'équation (E)

0.5 2) a-Montrer que : $a^2 = 4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$

0.75 b- Ecrire a sous forme trigonométrique

3) On considère les points A ,B et C dont les affixes sont respectivement a ,b et $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$

Soit (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$

0.5 a- Déterminer ω ,l'affixe du point Ω centre du cercle (Γ)

0.5 b- Montrer que les points O et C appartiennent au cercle (Γ)

0.75 c- Montrer que le nombre complexe $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

Exercice 3 :(3 points)

Une urne contient 10 boules blanches et deux boules rouges.

On extrait les boules de l'urne l'une après l'autre et sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, puis on arrête l'expérience.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées.

0.25 1) a- Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X

0.5 b- Calculer la probabilité de l'événement $[X=1]$

0.5 c- Montrer que : $p[X=2]=\frac{5}{33}$

0.5 d- Calculer la probabilité de l'événement $[X=3]$

0.5 2) a- Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est :

$$E(X)=\frac{13}{11}$$

0.75 b- Calculer $E(X^2)$,et en déduire la valeur de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

Problème : (10 points)

I- On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I=[0,1[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)} & ;0\le x<1 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5 1) Montrer que f est continue à gauche en 1.

0.5 2) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

0.75 3) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I puis donner son tableau de variations.

0.5 4) a-Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion unique d'abscisse $\frac{e-1}{e}$

0.75 b- Construire la courbe (C) en précisant sa demi-tangente au point d'abscisse 0. (on prendra $\|i\| = \|j\| = 2\,cm$)

0.5 5) Montrer qu'il existe un nombre réel unique α de l'intervalle I vérifiant : $f(\alpha) = \alpha$

0.25 6) a- Montrer que f est une bijection de l'intervalle I vers I

0.5 b- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle I.

II- On pose : $I_0 = \int_0^1 f(t)\,dt$, et pour tout entier naturel n non nul ; $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$

0.75 1) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0.75 2) Montrer que : $(\forall n \geq 0)$: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$

III- Pour tout nombre réel x de l'intervalle $J = [0;1[$ et pour tout entier naturel n non nul pose : $F_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; $F_n(x) = \int_0^x t^n f(t)\,dt$; $F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,dt$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} F_k(x)$

1 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\forall x \in J)$ $F_n(x) - S_n = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t}\,dt$

0.5 2) a-Montrer que la fonction $x \mapsto (1-x)\ln(1-x)$ est strictement décroissante sur J

0.5 b-Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1-t}$ est strictement croissante sur $[0,x]$ pour tout x élément de J

1 3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\forall x \in J)$ $0 \leq F_n(x) - S_n \leq \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

0.5 b- En déduire que pour tout x de l'intervalle J on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = F(x)$

0.5 4) a-Déterminer $F(x)$ pour $x \in J$

0.25 b- Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)$