

Exercice 1

(la géométrie dans l'espace)

(P) : $x + y + z + 4 = 0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1, -1, -1)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.

1. a) Calculons $d(\Omega, (P))$

$$\text{On a : } d(\Omega, (P)) = \frac{|1 + (-1) + (-1) + 4|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Donc $d(\Omega, (P)) = \sqrt{3} = R$ on conclue que (P) est tangent la sphère (S)

b) soit $H \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ on a $0 + (-2) + (-2) + 4 = 0$ ($H \in (P)$) et

$$\overrightarrow{\Omega H} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ alors : } \Omega H = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} \quad \text{donc } H \in (S)$$

Conclusion : le point $H \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est le point de contact du plan (P) et la sphère (S).

$$2. \quad \text{a) } A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ on a : } \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

D'où $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P)

$$\text{Donc } (P) : x - y - z + d = 0 \quad \text{et } B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in (P) \quad \text{donc } d = 0$$

Conclusion : $x - y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (P).

c) le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui est normal au plan (P) est un vecteur

directeur de la droite (Δ) et la droite (Δ) passe par le point

$\Omega(1, -1, -1)$ donc une représentation paramétrique de la droite (Δ) est :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

c) l'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S) vérifie le système

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=-1-t \\ (x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=3 \end{cases} \quad \begin{aligned} & t^2+(-t)^2+(-t)^2=3 \\ & d'où \Rightarrow t^2=1 \\ & \Rightarrow t=\pm 1 \end{aligned}$$

Alors les points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S) sont :

$$C \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

(les nombres complexes)

1. Soit l'équation : $z^2 + 10z + 26 = 0$

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \times 1 \times 26$
 $= 100 - 104 = -4$

On a $\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = -5+i \quad z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = -5-i$$

D'où $S = \{-5-i, -5+i\}$

2. $a = -2+2i$, $b = -5+i$, $c = -5-i$ et $\omega = -3$

a)
$$\frac{b-\omega}{a-\omega} = \frac{(-5+i)-(-3)}{(-2+2i)-(-3)}$$

$$= \frac{-2+i}{1+2i} = \frac{(2i+1)i}{2i+1} = i$$

b) on a :

$$\begin{cases} \left| \frac{b-\omega}{a-\omega} \right| = 1 \Rightarrow \Omega B = \Omega A \\ \arg \frac{b-\omega}{a-\omega} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow (\overline{\Omega B}, \overline{\Omega A}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

on en déduit que le triangle ΩAB est rectangle isocèle

3. a) on a $T(\vec{u}(6+4i)) \quad T(C)=D \Leftrightarrow \overline{CD} = \vec{u}$

$$\Leftrightarrow d - c = u \Leftrightarrow d - (-5-i) = (6+4i)$$

$$\Leftrightarrow d = (6+4i) + (-5-i)$$

$$\Leftrightarrow d = 1+3i$$

Donc $d_D = 1+3i$

b) on a $\frac{b-d}{a-d} = \frac{(-5+i)-(1+3i)}{(-2+2i)-(1+3i)} = \frac{-6-2i}{-3-i} = 2$

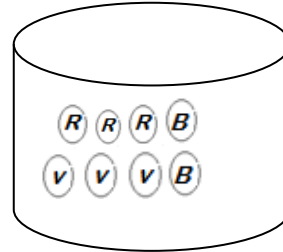
donc $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

et on conclue que *A est le milieu du segment [BD]*

Exercice 3

(les probabilités)

On tire de façon aléatoire successivement et sans remise 2 boules. $\text{Card}\Omega = A_8^2 = 56$



A « tirer au moins une boule Blanche »

B « tirer deux boules de même couleur »

1. • $\text{Card}A = 2(A_2^1 \times A_6^1 + A_2^2) = 26$ $p(A) = \frac{13 \times 2}{56} = \frac{13}{28}$

Donc : $p(A) = \frac{13}{28}$

ou calculer $p(\bar{A}) = \frac{A_6^2}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$ Donc : $p(A) = \frac{13}{28}$

• $\text{Card}B = (A_2^2 + A_3^2 + A_3^2) = 14$ $p(B) = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$ Donc : $p(B) = \frac{1}{4}$

2. *X la variable aléatoire égale au nombre de boules Blanches, tirées.*

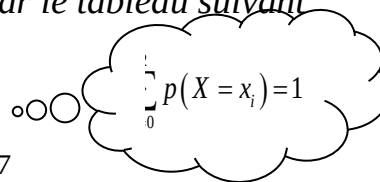
• *X peut prendre les valeurs 0, 1, 2.*

a) • $p(X=2) = \frac{A_2^2}{56} = \frac{1}{28}$

b) on a : $p(X=0) = \frac{A_6^2}{A_8^2} = \frac{15}{28}$ $p(X=1) = \frac{2 \times A_2^1 \times A_6^1}{A_8^2} = \frac{3}{7}$

Donc la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$



et $E(X) = \sum_{i=0}^2 x_i \cdot p(X=x_i) = 0 \times \frac{15}{28} + 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{1}{28} = \frac{7}{14}$

$E(X) = \frac{1}{2}$

Problème

(Etude de fonction)

I. ($\forall x \in \mathbb{R}$) $g(x) = e^x - 2x$

1. $g'(x) = (e^x - 2x)'$
 $= e^x - 2$

1. • g croissante $\Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \geq \ln 2$

• g décroissante $\Leftrightarrow g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow e^x - 2 \leq 0$
 $\Leftrightarrow x \leq \ln 2$

On en déduit que : $\begin{cases} g \text{ croissante sur l'intervalle } [\ln 2, +\infty[\\ g \text{ décroissante sur l'intervalle }]-\infty, \ln 2] \end{cases}$

2. $g(\ln 2) = (e^{\ln 2} - 2 \ln 2) = 2(1 - \ln 2)$

on a : $e > 2 \Leftrightarrow \ln(e) > \ln 2 \Leftrightarrow 1 - \ln 2 > 0$ donc : $g(\ln 2) > 0$

• g croissante sur l'intervalle $[\ln 2, +\infty[$

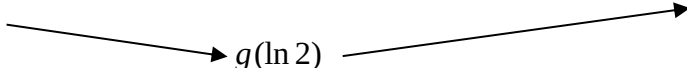
donc : $(\forall x \in [\ln 2, +\infty[) \quad g(x) \geq g(\ln 2) > 0$

• g décroissante sur l'intervalle $] -\infty, \ln 2]$

donc : $(\forall x \in] -\infty, \ln 2]) \quad g(x) \geq g(\ln 2) > 0$

On déduit que :
 $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) > 0$

Les variations de g sont résumées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

II. $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$

1. a) montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$

on a : $e^x - 2x = x \left(\frac{e^x}{x} - 2 \right)$ et $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 2 \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 2 \right) = -2 \end{cases}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x} - 2 \right)} = 0$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x} - 2 \right)} = -\frac{1}{2}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote verticale au voisinage de $+\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ donc (C) admet la droite $\left(y = -\frac{1}{2} \right)$

comme asymptote verticale au voisinage de $-\infty$.

$$2. \quad a) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \left(\frac{x}{e^x - 2x} \right)' = \frac{e^x - 2x - x(e^x - 2)}{(e^x - 2x)^2}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - 2x)^2}$$

$$b) \quad f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - 2x)^2} \quad \text{donc f est du signe de } (1-x)$$

On en déduit que : $\begin{cases} f \text{ croissante sur l'intervalle }]-\infty, 1] \\ f \text{ décroissante sur l'intervalle } [1, +\infty[\end{cases}$

Tableau de variation de f

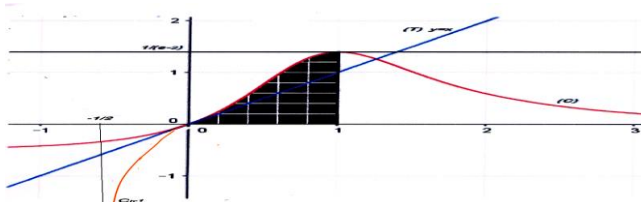
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'(x)		+	0	-
f(x)	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{e-2}$	$\searrow$ 0

c) la tangente (T) à (C) en (0,0) (f(0)=0) est la droite d'équation :

$$\bullet \quad y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = x$$

1. Construction de (C) et (T) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{e-2} \\ f'(1) &= 0 \end{aligned}$$

4. on a $\left(\frac{1}{e-2} \right)$ est un maximum local pour f sur $[0, +\infty[$

$$\text{donc : } (\forall x \in [0, +\infty[) \quad f(x) = \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$$

$$\begin{aligned} \text{et on a : } xe^{-x} - \frac{x}{e^x - 2x} &= \frac{xe^{-x}(e^x - 2x) - x}{e^x - 2x} \\ &= \frac{x e^{-x} (e^x - 2x) - x}{e^x - 2x} = \frac{-2x^2 e^{-x}}{e^x - 2x} = -2xe^{-x} f(x) \end{aligned}$$

$$\text{et comme } f(x) \geq 0 \text{ sur l'intervalle } [0, +\infty[\quad \text{alors : } xe^{-x} - \frac{x}{e^x - 2x} \leq 0$$

$$xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x}$$

$$\text{Conclusion : } (\forall x \in [0, +\infty[) \quad xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}.$$

b) on pose
$$\begin{cases} u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

donc en integrant par partie on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-x} dx &= \left[-x e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx \\ &= -e^{-1} - \left[e^{-x} \right]_0^1 \\ &= -e^{-1} - (e^{-1} - 1) \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

Conclusion : $\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$

c) d'après la question 4.a) $(\forall x \in [0, +\infty[) \quad x e^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$.

en utilisant la propriété des inégalités des intégrales on a :

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \leq \int_0^1 \frac{x}{e^x - 2x} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{e-2} dx$$

donc : $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \left[\frac{x}{e-2} \right]_0^1 \Rightarrow 1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$

III. $(\forall x \in]-\infty, 0]) \quad h(x) = f(x)$ On sait d'après ce qui

précède que h est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$

Donc la fonction h admet une fonction réciproque sur l'intervalle $J = f(]-\infty, 0])$

Puisque f est continue et croissante sur $]-\infty, 0]$ alors :

$$J = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right[= \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{e-2} \right[$$

IV.
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases} (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq 0$ (I)

• pour $n=0$ on a : $u_0 = -2 \leq 0$ donc (I) vraie.

• supposons que (I) est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$
(I) vraie donc $u_n \leq 0$ et puisque la fonction h est croissante sur $]-\infty, 0]$ alors

$$h(u_n) \leq h(0) \Rightarrow u_{n+1} \leq 0 \text{ d'où (I) vraie pour } n+1$$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq 0$.

2. on constate graphiquement que sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ $h(x) \geq x$ alors :

Pour $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in]-\infty, 0]$ donc pour $u_n = x$ on obtient : $h(u_n) \geq u_n \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$ ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.

3. la suite (u_n) est croissante majorée par 0 donc elle est convergente.

Et si on pose : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, l est solution de l'équation $h(x) = 0$ sur $]-\infty, 0]$

(car h est continue sur $[-2, 0]$, $(u_0 = -2) \in [-2, 0]$, $h([-2, 0]) \subset [-2, 0]$ et

la suite (u_n) est convergente.)

l'équation $h(x) = 0$ admet 0 comme solution donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.