Exercice 1: (2,5Pts)

1) Résoudre dans IR l'équation : $3t^2-4t+1=0$.

2) Déduire dans IR la solution de : $3e^x-4\sqrt{e^x}+1=0$ et $3\log_2(x)-4+\dfrac{1}{\log_2(x)}=0$.

3) Résoudre dans IR l'inéquation: $3\ln^3(x)-4\ln^2(x)+\ln(x)>0$

4) Résoudre dans IR^2 le système suivant : $\begin{cases} 3e^x-5e^y=1 \\ 2\sqrt{e^{2x}}-e^y=3 \end{cases}$

Exercice 2: (2 Pts)

On considère les deux intégrales suivantes : .

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx$

1) Calculer $I+J$, puis montrer que $I-J=0$.

2) Déduire la valeur de J, puis la valeur de I.

Exercice 3: (3 Pts)

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=5U_n-4 \;;\forall n\in IN \end{cases}$ et on pose $V_n=U_n-1$

1) Démontrer que $(V_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

2) Exprimer V_n en fonction de n .

3) Écrire U_n en fonction de n et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

4) Montrer que : $(\forall n\in IN)$; $\log_5(U_n-1)=n$ et déduire l'entier p tel que : $U_{3p+96}=125^{9p+8}+1$.

Exercice 4: (4,5 Pts)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$, on considère les points A ;B ;C et D d'affixes respectives $a=-2+2i$; $b=-5+i$; $c=-5-i$ et $d=-3$

1) Montrer que b et c sont des solutions de l'équation: $z^2+10z+26=0$.

2) Prouver que $a=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$; puis déduire que : $a^4+64=0$.

3) Ecrire $\dfrac{b-d}{a-d}$ sous forme algébrique et déduire la nature du triangle ABD.

4) On considère l'homothétie h de centre Ω et de rapport k, et soit le point $M'(z')$ image

du point $M(z)$ par h tel que $2z' = z - 6i$.

a) Déterminer ω l'affixe de Ω centre de l'homothétie h, ainsi déduire le rapport k.

b) Montrer que $e = -1 - 2i$ affixe de point E image de A par h.

5) a) Exprimer le nombre complexe $\dfrac{c-2d}{\sqrt{3}-i}$ sous forme algébrique et trigonométrique.

b) Déduire la valeur de : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Exercice 5: (8 Pts)

Partie I :

On considère la fonction g définie par: $g(x) = x + 2 - e^x$

1 – Montrer que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$

2 – Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}^+$ tel que $1 \leq \alpha < 2$

3 – Déduire que $g(x) > 0$ sur $[0;\alpha[$ et que $g(x) \leq 0$ sur $[\alpha,+\infty[$.

Partie II:

On considère la fonction f définie par: $\begin{cases} f(x) = \left(\dfrac{2}{x} - x - 2\right)e^{\frac{1}{x}} & ; x < 0 \\ f(x) = \ln\left(1 + xe^x\right) & ; x \geq 0 \end{cases}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (l'unité : $1cm$)

1 – Montrer que f est continue en 0.

2 – Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3 – Étudier la dérivabilité de f en 0, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.