

**Exercice 1:**

1. Montrer que :  $\forall a > 0 ; \forall b > 0 : \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$

2. En déduire que :  $\forall a > 0 ; \forall b > 0 ; \forall c > 0 : \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2}$

3. Soient  $a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_n$  des nombres réels strictement positifs tels que :

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$$

Montrer que :  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i + b_i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{2}$

**Exercice 2:**

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}$

2) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2}(x+1) > 0$

3) résoudre dans  $\mathbb{R} : \sqrt{|x-1|} \geq x-5$

4) Déterminer la négation et la valeur de vérité de la proposition suivante :

$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$

5) Montrer que :  $(\forall x \in [-2; 2]) : x + \sqrt{4 - x^2} \leq 2\sqrt{2}$

6) Montrer que :  $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^+) : a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$ .

7) Montrer que :  $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^+)(\forall c \in \mathbb{R}^+) : a + b + c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$

8) Montrer que :  $\forall x \geq 0; \forall y \geq 1; \forall z \geq 2 :$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{x+y+z}{2} \Leftrightarrow x=1 \text{ et } y=2 \text{ et } z=3$$

9) Soient  $a \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}$

Montrer que :  $[\forall x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c = 0] \Leftrightarrow a = b = c = 0$ .

10) Montrer que  $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{y^2 + 1} + y) = 1$

11) Montrer que :  $\forall x > 0 ; \forall y > 0 : \left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right) \geq 4$ .

12) Montrer que :  $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : (|x| < 1 \text{ et } |y| < 1) \Rightarrow |x+y| < |1+xy|$

13) Soient  $a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$

Montrer que :  $(\forall \varepsilon > 0; |a - b| < \varepsilon \Rightarrow a = b)$

14) Montrer que :  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  en déduire que  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

**Exercice 3:**

Soient  $a$  ;  $b$  et  $c$  des nombres réels tels que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; |ax^2 + bx + c| \leq 1$

1) Montrer que :  $|c| \leq 1$

2) Montrer que :  $-1 \leq a + b + c \leq 1$

3) En déduire que :  $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

**Exercice 4:**

Montrer par récurrence que :

1)  $\forall n \in \mathbb{N} ; 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

2)  $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 + 3 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

3)  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$  (avec  $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ )

**Exercice 5**

1) montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$

2) soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois réels de l'intervalle  $[0;1]$

Montrer que :  $a(1 - b) \leq \frac{1}{4}$  ou  $b(1 - c) \leq \frac{1}{4}$  ou  $c(1 - a) \leq \frac{1}{4}$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soient  $a_1; a_2; \dots ; a_n$  des réels de l'intervalle  $[0;1]$

On pose :  $A_n = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$  et  $B_n = (1 - a_1) \times (1 - a_2) \times \dots \times (1 - a_n)$ .

Montrer que :  $A_n \leq \frac{1}{2^n}$  ou  $B_n \leq \frac{1}{2^n}$ .