Exercice 1 Dérivabilité et Etude de fonction »

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

Et soit (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1- *Déterminer* (D_f) *le domaine de définition de la fonction f.*

2- *Vérifier que f est impaire.*

3- a) *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) *Déterminer la branche infinie de* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$.

4- a) *Montrer que* : $(\forall x\in D_f)\qquad f'(x)=\dfrac{x^2+3}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^4}}$

b) *Dresser le tableau de variation de f.*

5- *Construire* (C_f) *dans le repère orthonormé* $(o;\vec{i};\vec{j})$.

(on admet que (C_f) *n'admet pas de point d'inflexion sur l'intervalle* $[0;+\infty[$

6- *Soit g la restriction de f sur l'intervalle* $[0;+\infty[$.

a) *Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle I à déterminer .*
b) *Construire dans le même repère la courbe de la fonction* g^{-1} .
c) *Résoudre dans* $[0;+\infty[$ *l'équation :* $g^{-1}\left(\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2}}\right)=x$.

Correction Exercice 1

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

1- *On a :* $D_f=\{x\in IR / x^2+1>0\}$ *Or* $(\forall x\in IR)\quad x^2+1>0$ *Donc :* $D_f=IR$

2- *On a :*

$\begin{cases}(x\in IR)\Leftrightarrow(-x\in IR)\\ f(-x)=f(x)\end{cases}$ *Donc f est une fonction impaire.*

3- a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x}{1+\frac{1}{x^2}}}=+\infty$$

b) *On a :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *Calculons* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}=0$$

Interprétation géométrique :

$\left(C_f\right)$ *admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de* $+\infty$.

4- a) *On a :* $(\forall x \in IR) \quad f'(x)=\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)'$

$$f'(x)=\left(\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}\right)'=\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}-x\times\frac{1}{3}\times 2x\times(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1}}{\left((x^2+1)^{\frac{1}{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^2(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}\left((x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x^2+1)^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^2\right)}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{\left(x^2+1-\frac{2}{3}x^2\right)}{(x^2+1)^{\frac{4}{3}}}=\frac{(x^2+3)}{3(x^2+1)^{\frac{4}{3}}}=\frac{(x^2+3)}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^4}}$$

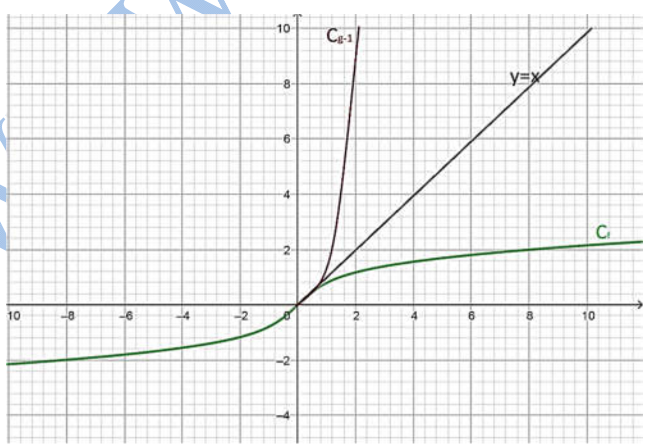
Donc : $(\forall x \in IR) \quad f'(x)=\dfrac{(x^2+3)}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^4}}$.

b) $(\forall x\in IR) \quad f'(x)>0$ *et* f *est impaire ; dressons le tableau de variation de f sur l'intervalle* $[0;+\infty[$.

Tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5- *Construction de* $\left(C_f\right)$ *et de la courbe de* g^{-1}



6- a) *f est continue strictement croissante sur* $[0;+\infty[$ *donc sa restriction g l'est aussi et par conséquent elle admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle*

$$J = f\left(\left[0;+\infty\right[\right) = \left[f(0);\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left[0;+\infty\right[$$

b) Construction de la courbe de g^{-1} *voir graphique ci-dessus .*

c) Soit $x \in IR^{+}$

x est solution de $g^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} = g(x)$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{x^2+1-2x}{2x^2+1}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x = 1 \qquad S=\{0;1\}$$